

Doi:10.12051/j.issn.1674-4942.2023.04.005



高斯色噪声激励下四辊冷轧机垂直振动模型的 响应分析

陈晓菲, 李晶*, 郭蓉
(太原科技大学 应用科学学院, 山西 太原 030024)

摘要:本文研究了具有谐波力和高斯色噪声激励下四辊冷轧机垂直振动模型的非线性动力学响应。通过平均法和随机平均法分别对四辊冷轧机垂直振动模型进行了理论分析。通过蒙特卡罗方法验证了近似解析法的有效性。最后,探讨了随机激励对轧机系统稳态响应的影响。研究发现色噪声的噪声强度和相干时间会引起低振幅和高振幅振荡之间的随机转移。这项研究可为实现四辊冷轧机垂直振动系统的振动控制和可靠性设计提供理论指导。

关键词:四辊冷轧机;高斯色噪声;随机平均法;随机转移

中图分类号: O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1674-4942(2023)04-0387-06

Response Analysis for a Vertical Vibration Model of Four-roller Cold Rolling Mill under Gaussian Colored Noise Excitation

CHEN Xiaofei, LI Jing*, GUO Rong

(School of Applied Sciences, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract:In this paper, the nonlinear dynamic responses of the vertical vibration model of four-roller cold rolling mill with harmonic force and Gaussian colored noise excitation are investigated. The vertical vibration model of four-roller rolling mill is theoretically analyzed by the averaging method and the stochastic averaging method, respectively. The correctness of the approximate analytical method is verified by Monte Carlo numerical results. Finally, the influences of the random excitation on steady-state responses of rolling mill system is discussed. It is found that the noise intensity and correlation time of the colored noise can induce the occurrence of stochastic transitions between low-amplitude and high-amplitude oscillations. This study can provide theoretical guidance for the realization of vibration control reliability design in the four-roller cold rolling mill system.

Keywords:four-roller cold rolling mill; Gaussian colored noise; stochastic averaging method; stochastic transitions

冷轧制过程中伴有的垂直振动问题一直受到国内外科研人员的关注,也是困扰钢铁企业生产的重大技术难题^[1-2]。四辊冷轧机因其高精度、高产量、生产灵活等优良特点被广泛应用在航空航天^[3]、钢铁冶金^[4]等行业。近些年来,越来越多研究人员探索了轧机系统的非线性动力学行为。例如,Peng等^[5]探索了多重非线性作用下的耦合轧机振动模型的动态分岔特性。Liu等^[6]探索了电磁激励下强非线性的机电耦合主驱动系统的分岔和混沌。此外,Wang等^[7]为了抑制磨机的垂直振动设计了一种新型的颗粒减振器,为轧机减振技术的研究提供了一些理论指导。

收稿日期:2023-03-23

基金项目:国家自然科学基金项目(52004169);山西省高等学校科技创新项目(2022L316)

第一作者:陈晓菲(1998—),江苏南通人,硕士研究生,研究方向为随机微分方程及随机动力学系统。E-mail: cxf3426@163.com

*通信作者:李晶(1983—),湖南怀化人,教授,研究方向为图与互连网络。E-mail: jing-li83@hotmail.com

然而,实际环境中存在各种不可避免的随机扰动,如热扰动、阵风等^[8-9],这些随机扰动对轧机系统和轧制过程的稳定性以及轧制产品质量产生不同程度的影响,因此研究随机激励下轧机系统的响应具有理论和实践意义。对于轧机系统,大多数研究考虑了轧机轧制力、板带不平度等随机特性。为了进一步探索真实环境中的随机动态行为,需要更准确地描述随机因素。通常研究中所设的噪声源是高频白噪声是因为其在数学上处理更简单,而通过色噪声引入的相关时间可以更好地描述实际的环境干扰。到目前为止,轧机系统在色噪声驱动的动态响应尚未得到很好的解决。因此,为了更好地反映轧机系统在实际工程环境中的动态行为,本文致力于分析高频色噪声激励下四辊冷轧机垂直振动的动力学响应,利用随机平均法得到稳态概率密度函数,并进一步通过数值模拟发现了在高频色噪声激励下四辊冷轧机垂直振动系统的随机转移。

1 模型描述

根据四辊冷轧机结构和轧制过程实际情况,可将轧机简化为如图1所示的垂直振动模型。将上下辊系抽象为质量为 m 的质量块, k 和 c 分别为支承辊与工作辊的等效刚度和等效阻尼, ΔP 为冷轧机的动态轧制力变化量: $\Delta P = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ ^[10], b_1 、 b_2 和 b_3 分别为一次项、二次项和三次项系数, x 为垂直方向的振动位移。 $F' = f\sin(\Omega t^*)$ 是冷轧机的谐波激励, f 和 Ω 分别是谐波激励的振幅和频率。

由图1可以得到轧机动力学方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \Delta P + F', \quad (1)$$

将 ΔP 和 F' 代入方程(1),方程(1)可以改写为如下动力学方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k - b_1)x - b_2x^2 - b_3x^3 = f\sin(\Omega t^*). \quad (2)$$

引入以下无量纲变换:

$$t = \omega_0 t^*, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad \alpha = 1 - \frac{b_1}{k}; \quad \beta = -\frac{b_2}{m\omega_0^2},$$

$$\gamma = -\frac{b_3}{m\omega_0^2}, \quad A = \frac{c}{m\omega_0}, \quad F = \frac{f}{m\omega_0^2},$$

其中, t 、 A 、 F 、 ω 分别表示无量纲时间、阻尼、外部激励幅值和频率。研究表明,动态轧制力一次项系数 b_1 直接影响轧机的固有频率。随着一次项系数 b_1 的减小,轧机系统振动固有频率增大,系统的振幅减小,即控制 b_1 的大小能有效地实现振动控制。在本文中,我们仅考虑 $k > b_1$ 及 $\alpha > 0$ 的情况。因此,令 $\omega_1^2 = \alpha$,方程(1)可以改写为以下无量纲形式:

$$\ddot{x} + A\dot{x} + \omega_1^2x + \beta x^2 + \gamma x^3 = F\sin(\omega t), \quad (3)$$

考虑轧机所遭受的外部随机扰动,并假设该系统中的耦合项和非线性非常小,通过引入一个小参数 $\varepsilon(0 < \varepsilon \ll 1)$,可以建立对应于方程(1)的随机模型

$$\ddot{x} + \varepsilon^2 A\dot{x} + \omega_1^2x + \varepsilon^2 \beta x^2 + \varepsilon^2 \gamma x^3 = \varepsilon^2 F\sin(\omega t) + \varepsilon \xi(t), \quad (4)$$

其中 $\xi(t)$ 是一种指数相关的高斯色噪声,具有以下统计特征:

$$E[\xi(t)] = 0, \quad E[\xi(t)\xi(t')] = \frac{D}{t_1} \exp\left[-\frac{|t-t'|}{t_1}\right],$$

其中 $E[\cdot]$ 是数学期望运算符, D 和 t_1 表示高斯色噪声 $\xi(t)$ 的噪声强度和相干时间。此外, $\xi(t)$ 满足以下微分方程:

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\frac{1}{t_1}\xi(t) + \frac{1}{t_1}\zeta(t), \quad (5)$$

这里 $\zeta(t)$ 表示均值和相关性均为零的高斯白噪声。 $E[\zeta(t)\zeta(t')] = 2D\delta(t-t')$,其中 $\delta(\cdot)$ 表示狄利克雷函数。

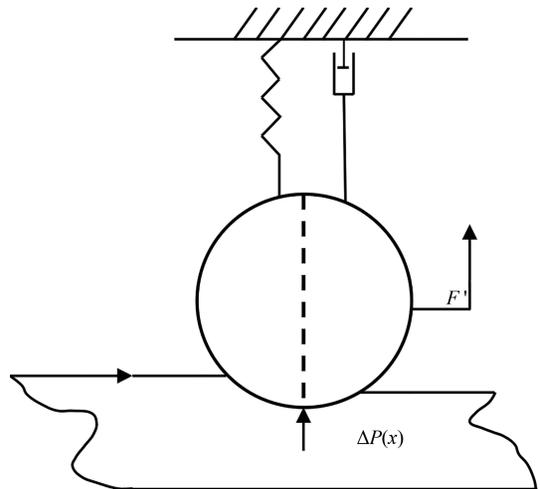


图1 四辊冷轧机垂直振动模型

Figure 1 Vertical vibration model of four-roller cold rolling mill

2 理论分析

本节结合摄动法和随机平均法分别计算给定确定性轧机系统的稳态振幅响应和随机轧机系统的时间平均均方响应。这里主要考虑轧机系统的主共振情形,即 $\omega^* = \omega$ 。

首先,考虑到确定性情况($\xi(t) = 0$),然后将轧机系统(4)简化为

$$\ddot{x} + \omega^{*2}x = \varepsilon^2 h(x), \quad (6)$$

其中 $\omega^{*2} = \omega_1^2(1 + \varepsilon^2\sigma_1)$, σ_1 是一个失谐参数,且

$$h(x) = \sigma_1\omega_1^2x + F\sin(\omega t) - (A\dot{x} + \beta x^2 + \gamma x^3)。$$

假设 x_0 是轧机系统(6)的解,并引入如下范德波变换:

$$x_0 = b_0(t)\cos\theta_{x_0}, \dot{x}_0 = -\omega b_0(t)\sin\theta_{x_0}, \theta_{x_0} = \omega t + \phi_0, \quad (7)$$

可以得到

$$\dot{b}_0 = -\frac{\varepsilon^2}{\omega} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x_0)\sin\theta_{x_0} d\theta_{x_0}, \quad (8a)$$

$$\dot{\phi}_0 = -\frac{\varepsilon^2}{\omega b_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x_0)\cos\theta_{x_0} d\theta_{x_0}, \quad (8b)$$

其中 b_0 和 ϕ_0 分别是振幅和相位。通过应用标准平均法,将 $h(x_0)$ 代入方程(8a)、(8b)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{b}_0 &= -\frac{\varepsilon^2}{2\omega} (F\cos\phi_0 + A\omega b_0), \\ \dot{\phi}_0 &= -\frac{\varepsilon^2}{2\omega b_0} \left(\sigma_1\omega_1^2 b_0 - F\sin\phi_0 - \frac{3}{4}\gamma b_0^3 \right)。 \end{aligned}$$

根据 $\dot{b}_0 = 0, \dot{\phi}_0 = 0$,可以得到以下稳态幅频方程:

$$F^2 = (A\omega b_0)^2 + \left(\sigma_1\omega_1^2 b_0 - \frac{3}{4}\gamma b_0^3 \right)^2. \quad (9)$$

然后,我们利用摄动技术研究随机噪声对确定性稳态运动的影响。假设噪声强度很小,设

$$x = x_0 + x_1, \quad (10)$$

其中 x_0 表示确定性模型(6)的解, x_1 表示小干扰。将式(10)代入式(4)并消除 x_1 的高阶小项,得到

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= -\varepsilon^2 h_1(x_1) + \varepsilon \xi(t), \\ h_1(x_1) &= A\dot{x}_1 + 2\beta x_0^2 x_1 + 3\gamma x_0^2 x_1。 \end{aligned} \quad (11)$$

假设 ε 很小,引入如下变量变换

$$x_1 = b_1(t)\cos\theta_{x_1}, \dot{x}_1 = -\omega_1 b_1(t)\sin\theta_{x_1}, \theta_{x_1} = \omega_1 t + \phi_1, \quad (12)$$

将式(12)代入式(11),可以推导 $b_1(t), \phi_1(t)$ 的随机微分方程为

$$\dot{b}_1(t) = \frac{\varepsilon^2}{\omega_1} h_1(x_1)\sin\theta_{x_1} - \frac{\varepsilon}{\omega_1} \xi(t)\sin\theta_{x_1}, \quad (13a)$$

$$\dot{\phi}_1(t) = \frac{\varepsilon^2}{\omega_1 b_1} h_1(x_1)\cos\theta_{x_1} - \frac{\varepsilon}{\omega_1 b_1} \xi(t)\cos\theta_{x_1}, \quad (13b)$$

然后,利用随机平均法^[11]可以得到以下伊藤随机微分方程

$$db_1 = \left(-\frac{\varepsilon^2 A b_1}{2} + \frac{\varepsilon^2 \pi S(\omega_1)}{2b_1\omega_1^2} \right) dt + \frac{\varepsilon}{\omega_1} \sqrt{\pi S(\omega_1)} dW_1(t), \quad (14a)$$

$$d\phi_1 = \frac{3\varepsilon^2 \gamma b_0^2}{4\omega_1} dt + \frac{\varepsilon}{\omega_1 b_1} \sqrt{\pi S(\omega_1)} dW_2(t), \quad (14b)$$

其中, $W_1(t), W_2(t)$ 为独立的标准化维纳过程, $S_\xi(\omega_1) = 2D/[2\pi(1 + t_1^2\omega_1^2)]$,表示 $\xi(t)$ 在 ω_1 处的功率谱密度值。

显然,式(14a)不依赖于 ϕ_1 ,因此可以得到 $b_1(t)$ 的概率密度函数 $p(b_1, t)$,其满足以下Fokker-Planck-Kolmogorov方程:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial b_1} \left[\left(-\frac{\varepsilon^2 A b_1}{2} + \frac{\varepsilon^2 \pi S_\xi(\omega_1)}{2 b_1 \omega_1^2} \right) p \right] + \frac{\varepsilon^2 \pi S_\xi(\omega_1)}{2 \omega_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial b_1^2}, \tag{15}$$

通过 $\frac{\partial p(b_1, t)}{\partial t} = 0$ 可以推导出稳态概率密度

$$p(b_1) = \frac{b_1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{b_1^2}{2\sigma^2}\right), \sigma^2 = \frac{\pi S_\xi(\omega_1)}{A \omega_1^2}. \tag{16}$$

根据式(16), 振幅 b_1 的一阶矩和二阶矩为

$$E(b_1) = \int_0^{+\infty} b_1 \cdot p(b_1) db_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma, \tag{17a}$$

$$E(b_1^2) = \int_0^{+\infty} b_1^2 \cdot p(b_1) db_1 = 2\sigma^2. \tag{17b}$$

此外, 结合式(17a)、式(17b)和式(10), 可以推导出均方响应为

$$E(x^2) = E[b_0(t) \cos \theta_{x_0} + b_1(t) \cos \theta_{x_1}]^2 = b_0^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) + \sigma^2. \tag{18}$$

从式(18)可以发现均方响应 $E(x^2)$ 是时间 t 的周期函数。通过对时间 t 求平均值, 可以得到时间平均均方响应^[12]如下:

$$\langle E(x^2) \rangle_t = \frac{b_0^2}{2} + \frac{\pi S_\xi(\omega_1)}{A \omega_1^2},$$

其中 $\langle \cdot \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt$ 表示在一个周期 T 上对时间 t 的时间平均算子。

3 数值验证

本节将验证所得解析解的正确性, 并分析随机扰动对系统响应的影响。在此模拟中, 选择系统参数 $\varepsilon = \sqrt{0.1}, A = 0.15, \alpha = 1.45, \beta = 1.50, \gamma = 2.0$ 。

如图2(a)所示, 我们考虑确定性情况下系统(4)的稳态幅度响应($\xi(t) = 0$), 当振幅 $F = 3.85$, 频率 $\omega = 1.6$ 时, 发现平均法得到的理论解与四阶龙格-库塔得到的数值解吻合较好。有趣的是, 当 ω 或 F 达到某个临界值时, 稳态振幅响应上会出现多值响应现象, 如图2(a)中的灰色区域所示。实际上, 多值响应包含2个稳定解和1个不稳定解, 即当 ω 或 F 达到某个临界值时, 会发生从上分支/下分支到下分支/上分支的跳跃。显然, 其本质上是高振幅和低振幅振荡的双稳态行为。因此, 我们认为轧机系统具有的双稳态行为在很大程度上取决于系统的初始值。图2(b)给出了随机情况下的时间平均均方响应, 从图中可以发现由随机平均法得到的

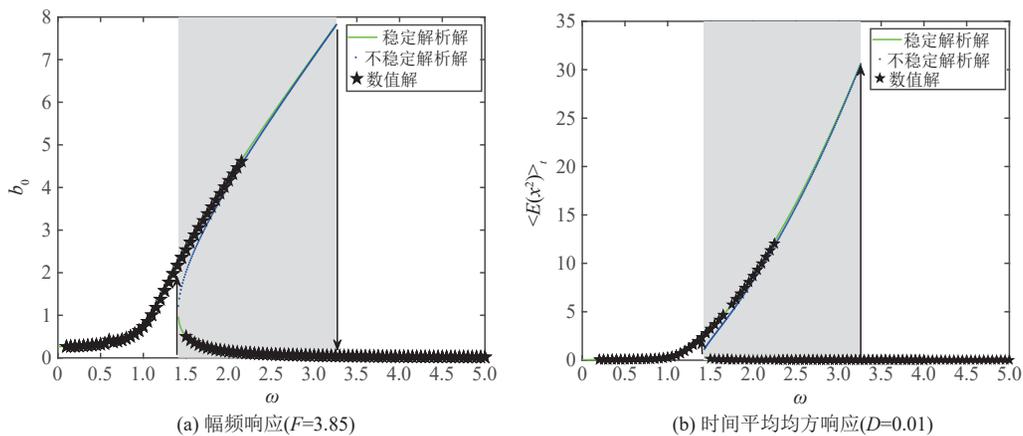
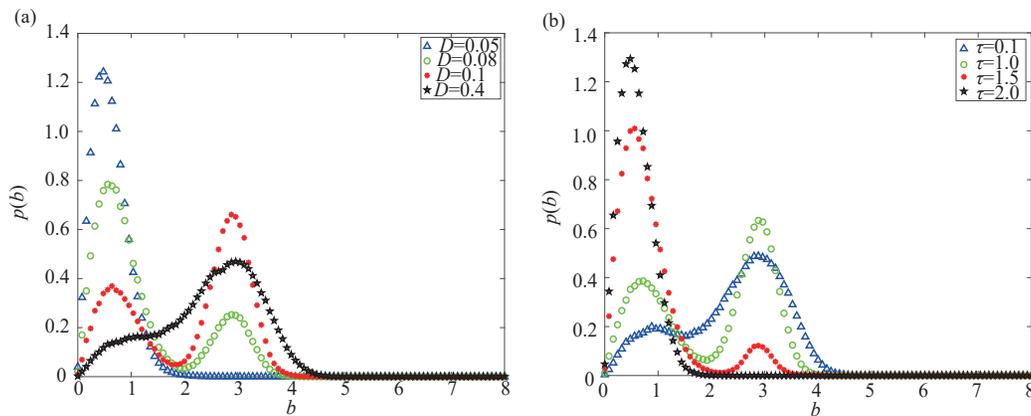


图2 系统(4)的响应

Figure 2 Responses of the system(4)

近似解析解与二阶龙格-库塔得到的数值解一致。

接下来,将进一步研究轧机系统在高斯色噪声激励下的随机转移现象。图3分析了噪声强度和相关时间对稳态概率密度的影响,其中系统(4)的振幅为 $b(t) = \sqrt{x^2(t) + [\dot{x}(t)/\omega]^2}$ 。通过蒙特卡罗可以获得振幅 $b(t)$ 的稳态概率密度函数 $p(b)$ 。如图3(a)所示,当噪声强度较小, $D = 0.05$ 时,在低振幅振荡只看到1个峰值。但是,当噪声强度进一步增加到 $D = 0.08$ 时,稳态概率密度出现双峰。此外,当噪声强度 $D = 0.4$ 时,稳态概率密度再次趋于1个峰值。相反,当噪声强度恒定时,随着相关时间的减少,稳态概率密度会出现双峰。因此,在图3(a)中,固定相关时间 $\tau = 0.1$,可以观察到随着噪声强度的增加,随机转移现象发生得更频繁。相反,在图3(b)中,固定噪声强度 $D = 0.3$,可以看出随机转移现象随着相关时间的减少而更频繁地发生。这些研究表明高斯色噪声的噪声强度和相关时间都会导致双峰的出现,这意味着高斯色噪声诱导了随机转移的发生。这些由稳态概率密度变化引起的随机转移现象可以称为随机分岔。



系统参数 $F = 3.85$, $\omega = 1.60$; (a) $\tau = 0.1$; (b) $D = 0.3$; 低振幅振荡对应的初始值为 $x(0) = 0.01$, $\dot{x}(0) = 0.01$

图3 系统(4)在振幅 b 的稳态概率密度

Figure 3 Steady-state probability densities for amplitude b of the system(4)

根据上述研究可以得出噪声强度和相关时间都会诱导轧机系统的随机转移,从而进一步导致冷轧机性能异常和轧制产品的缺陷,甚至影响轧机的安全使用。

4 结论

本文研究了具有高斯色噪声和谐波力的四辊冷轧机垂直振动模型的动力学响应。通过理论分析和数值模拟发现:首先,近似解析解与数值求解吻合较好,表明所采用解析法的有效性;其次,随着外部激励频率 ω 的增大或减小,在达到一定临界值时会发生突然跳跃;最后,高斯色噪声的噪声强度和相关时间会导致轧机系统出现灾难性的随机转移。

参考文献:

- [1] LIU Z L, LI P, JIANG J H, et al. Research on vibration characteristics of mill rolls based on nonlinear stiffness of the hydraulic cylinder [J]. Journal of Manufacturing Processes, 2021, 64: 1322-1328.
- [2] PATEL A, MALIK A, MATHEWS R. Efficient three-dimensional model to predict time history of structural dynamics in cold rolling Mills [J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2022, 144(7): 071009.
- [3] FU L, XIAO H, YU C, et al. Bonding enhancement of cold rolling Al/steel composite plates via self-nano film modification [J]. Journal of Materials Processing Technology, 2022, 300: 117427.
- [4] SHI P M, YU Y, GAO H, et al. A novel multi-source sensing data fusion driven method for detecting rolling mill health states under imbalanced and limited datasets [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 171: 108903.

- [5] PENG R R, ZHANG X Z, SHI P M. Coupled vibration behavior of hot rolling mill rolls under multinonlinear effects[J]. Shock and Vibration, 2020, 2020: 1-14.
- [6] LIU S, AI H L, SUN B P, et al. Bifurcation and chaos of electromechanical coupling main drive system with strongly nonlinear characteristic in mill[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 98: 101-108.
- [7] WANG M, XU H D, HE D P, et al. Design of a damped vibration absorber to control the resonant vibration of roll[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 178: 109262.
- [8] BU M, LI J, GUO R, et al. Dynamical responses of a Gaussian colored noise-driven shape memory alloy oscillator with a periodic force[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2023, 166: 112966.
- [9] ZHANG X Y, KHEIRI M, XIE W F. Nonlinear dynamics and gust response of a two-dimensional wing[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2020, 123: 103478.
- [10] 侯东晓, 王新刚, 张华伟, 等. 非线性动态轧制过程下冷轧机参激振动特性[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2017, 38(12): 1754-1758, 1789.
- [11] ZHU W Q. Recent developments and applications of the stochastic averaging method in random vibration[J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(10S): S72-S80.
- [12] HAIWU R, WEI X, GUANG M, et al. Response of a duffing oscillator to combined deterministic harmonic and random excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 242(2): 362-368.

(责任编辑:刘 炜)