



具有季节性的周期性传染病模型及基本再生数研究

张睿桐, 曹连英*

(东北林业大学 理学院, 黑龙江 哈尔滨 150040)

摘要:基于传染病的季节性特征,研究一种周期不连续传染病模型,讨论其解的存在性和唯一性,通过引入的线性积分算子与谱半径定义了该周期不连续系统的基本再生数,并结合微分方程的相关思想给出该周期不连续系统的基本再生数,为后续周期不连续传染病模型的研究奠定了基础。

关键词:周期不连续;基本再生数;传染病模型

中图分类号:R181;O175 **文献标志码:**A **文章编号:**1674-4942(2023)04-0376-06

Study on the Model of Periodic Infectious Disease with Seasonality and Basic Regeneration Number

ZHANG Ruitong, CAO Lianying*

(College of Science, Northeast Forestry University, Harbin 150040, China)

Abstract:Based on the seasonal characteristics of infectious diseases, a model of periodic discontinuous infectious diseases is developed, and the existence and uniqueness of its solutions are discussed. The basic regeneration number of the periodic discontinuous system is defined by introducing linear integral operators and spectral radius, and the basic regeneration number of the periodic discontinuous system is given by combining the relevant ideas of differential equations. It lays a foundation for the study of subsequent cycle discontinuous infectious disease model.

Keywords:periodic discontinuity; basic regeneration number; epidemic model

传染病严重影响人类的健康和生活质量,给身心造成伤害,如新冠肺炎、猴痘、霍乱、登革热等。随着传染病模型的提出,数学模型已经成为研究传染病传播、控制的重要工具。近年来,有大量文献对传染病进行了研究,例如分析传染病的动力学性质、疫情变化趋势、传染病预防、控制等。目前对传染病的防控措施主要是疫苗接种、隔离等^[1],研究表明疫苗接种和隔离可以有效地阻断传染病的传播^[2-3]。

在疾病传播的过程中,周期性的波动是十分常见的^[4]。例如,预防某些传染病的疫苗接种计划就是周期性的,气候的变化以及周而复始的日常生活(如学校的开学和放假,法定节假日等)也具有典型的周期性特征,从而导致一些传染病也具有周期性。在一个周期内传染病传播特性随时间的变化而变化,有时亦呈现不连续性。

基本再生数是传染病一个非常重要的指标。对于传统的传染病模型如非周期系统,已经有一些成熟方法能计算出基本再生数。例如,Guo等^[5]给出了具有不连续治疗策略的SIR传染病模型的基本再生数。对于周期连续系统,Wang等^[6]讨论了计算周期连续系统基本再生数的方法。Tang等^[7]讨论了一种周期不连续系

收稿日期:2023-05-17

基金项目:国家自然科学基金项目(12001088)

第一作者:张睿桐(1999—),黑龙江宁安人,硕士研究生,研究方向为概率论与数理统计。E-mail:2264633548@qq.com

*通信作者:曹连英(1976—),黑龙江哈尔滨人,副教授,研究方向为概率论与数理统计。E-mail:750168212@qq.com

统及基本再生数的阈值动力学行为。基于上述研究内容,本文研究一种轻、重症状感染者的六仓室周期不连续传染病模型,主要研究该周期不连续系统解的存在性和唯一性以及系统的基本再生数。

1 模型建立

依据一些传染病传播强弱与患病严重程度的特点,本文将人群分为6类人群:易感人群 S 、未确诊具有感染性且症状较轻人群 I_a (包括无症状感染人群)、未确诊具有感染性且症状较重的人群 I_b 、确诊为轻症状感染者自主居家隔离的人群 Q_h 、确诊为重症状感染者并被医院隔离治疗的人群 Q_H 、被治愈的感染人群 R , A 为总人口。考虑到疫苗接种、气候变化、学校的开学和放假等典型的周期性特征以及不连续特征,建立了一种不连续的周期传染病模型。设 $\omega > 0$ 为疾病的传播周期,模型假设如下:

1)感染者分为轻症状感染者和重症状感染者2类,且这2类感染者都能通过接触感染易感人群。假设易感人群接触重症状感染者会被感染为轻症状或重症状感染者,而易感人群接触轻症状感染者会被感染为轻症状感染者。

2)传染病具有周期特征且疾病的传播是不连续的。为便于研究,我们将疾病传播周期划分为2个阶段:疾病传染率低的阶段称为淡季,用 J_1 来表示;疾病传染率高的阶段称为旺季,用 J_2 来表示。假设疾病传播初期传染率低。其中,

$$J_1 = \bigcup_{m=0}^{+\infty} [m\omega, m\omega + (1-\theta)\omega), J_2 = \bigcup_{m=0}^{+\infty} [m\omega + (1-\theta)\omega, (m+1)\omega).$$

记 $\beta_a(t)$ 为易感者与轻症状感染者接触感染为轻症状感染者的感染率, $\beta_b(t)$ 为易感者与重症状感染者接触感染为轻症状感染者的感染率, $\beta(t)$ 为易感者与重症状感染者接触感染为重症状感染者的感染率。并假设每一阶段感染率为常数,如下所示:

$$\beta_a(t) = \begin{cases} \beta_{a1}, t \in J_1 \\ \beta_{a2}, t \in J_2 \end{cases}, \beta_b(t) = \begin{cases} \beta_{b1}, t \in J_1 \\ \beta_{b2}, t \in J_2 \end{cases}, \beta(t) = \begin{cases} \beta_1, t \in J_1 \\ \beta_2, t \in J_2 \end{cases}.$$

基于以上假设,建立如下周期不连续传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta_a SI_a - \beta_b SI_b - \beta SI_b - \mu S, \\ \frac{dI_a}{dt} = \beta_a SI_a + \beta_b SI_b - (\mu + r_a) I_a, \\ \frac{dI_b}{dt} = \beta SI_b - (\mu + d + r_b) I_b, \\ \frac{dQ_h}{dt} = r_a I_a - (\mu + \delta_h) Q_h, \\ \frac{dQ_H}{dt} = r_b I_b - (\mu + d + \delta_H) Q_H, \\ \frac{dR}{dt} = \delta_h Q_h + \delta_H Q_H - \mu R, \end{cases} \quad (1)$$

易得无病平衡点 E_0 为 $\left(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0\right)$ 。

记系统初值 $P_0 = (S_0, I_{a0}, I_{b0}, Q_{h0}, Q_{H0})$,记总人数 $\Lambda(t) = S(t) + I_a(t) + I_b(t) + Q_h(t) + Q_H(t) + R(t)$,模型参数如表1所示,疾病传播如图1所示。

这里参数 $A, \mu, d, \beta_a, \beta_b, \beta, r_a, r_b, \delta_h, \delta_H$ 均为非负。考虑重症状感染者到医院隔离治疗相较于轻症状感染者自主居家隔离比要大,故假设 $r_b > r_a$ 。

考虑如下系统:

表 1 模型的参数定义

Table 1 Parameter definition of the model

参数	定义
A	单位时间内人数的变化
μ	自然死亡率
d	因病死亡率
r_a	轻症状感染者被居家隔离的速率
r_b	重症状感染者被医院治疗隔离的速率
δ_h	轻症状感染者居家隔离后的恢复率
δ_H	重症状感染者医院隔离后的恢复率

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta_a(t)SI_a - \beta_b(t)SI_b - \beta(t)SI_h - \mu S, \\ \frac{dI_a}{dt} = \beta_a(t)SI_a + \beta_b(t)SI_b - (\mu + r_a)I_a, \\ \frac{dI_b}{dt} = \beta(t)SI_b - (\mu + d + r_b)I_b, \\ \frac{dQ_h}{dt} = r_a I_a - (\mu + \delta_h)Q_h, \\ \frac{dQ_H}{dt} = r_b I_b - (\mu + d + \delta_H)Q_H. \end{cases} \quad (2)$$

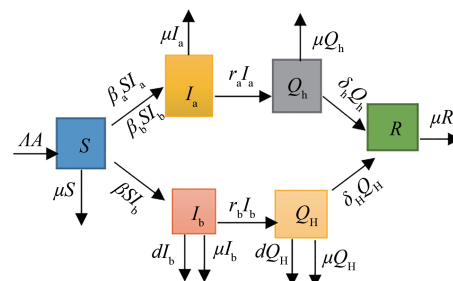


图1 疾病的传播过程示意图

Figure 1 Diagram of how a disease spreads

记 $D_0 = \{P = (S, I_a, I_b, Q_h, Q_H) | P \geq 0, 0 \leq S + I_a + I_b + Q_h + Q_H \leq \Lambda(0)\}$, 显然 $D_0 \subset \mathbb{R}_+^5$.

定理 1.1 对于任意 $P_0 \in D_0$, 在初值下的系统(2)在 $\mathbb{R}_+$ 中有唯一全局解,

$$\varphi(t, P_0) = (S(t, P_0), I_a(t, P_0), I_b(t, P_0), Q_h(t, P_0), Q_H(t, P_0)).$$

证明 仿照文献[7]证明, 可知定理 1.1 成立, 并且 $\varphi(t, P_0)$ 对于 t 和系统(2)所有参数都连续, 且对于任意 $t \in \mathbb{R}_+$, 有 $\varphi(t, P_0) \subseteq D_0$, 解 $\varphi(t, P_0)$ 在 P_0 处是可微的。

2 基本再生数

设 $x = (I_a, I_b, Q_h, Q_H)^T$ 。首先, 将系统(2)的感染仓室线性化,

$$F = \begin{pmatrix} \beta_a SI_a + \beta_b SI_b \\ \beta SI_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} (\mu + r_a)I_a \\ (\mu + d + r_b)I_b \\ (\mu + \delta_h)Q_h - r_a I_a \\ (\mu + d + \delta_H)Q_H - r_b I_b \end{pmatrix}.$$

E_0 处对应的 Jacobi 矩阵 F, V 如下:

$$F_i(t) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{ai}A}{\mu} & \frac{\beta_{bi}A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_i A}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, i=1,2, V = \begin{pmatrix} \mu + r_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu + d + r_b & 0 & 0 \\ -r_a & 0 & \mu + \delta_h & 0 \\ 0 & -r_b & 0 & \mu + d + \delta_H \end{pmatrix},$$

记 $\tilde{F}(t) = \chi J_1(t) \cdot F_1 + \chi J_2(t) \cdot F_2$ 。其中,

$$\chi J_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in J_i, \\ 0, & t \notin J_i, \end{cases}$$

且 $\tilde{F}(t)$ 是周期为 ω 的周期函数。

不连续系统感染仓室线性化系统如下:

$$\frac{dx}{dt} = (\tilde{F}(t) - V)x, t \in (J_1 \cup J_2). \quad (3)$$

在计算基本再生数之前, 定义一个线性算子 L 。

考虑线性系统:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Vx(t), \quad (4)$$

并设 $Y(t, s) (t \geq s)$ 为线性系统(4)的演化算子, 满足

$$\frac{d}{dt} Y(t, s) = -VY(t, s), t \geq s, Y(s, s) = E^4, \quad (5)$$

其中 E^4 是一个 4×4 单位矩阵, 易得 $Y(t, s) = e^{-V(t-s)}$ 。

记 $I(s)$ 为感染仓室中感染个体的分布, 则 $\tilde{F}(s)I(s)$ 为在 s 时刻引入的感染个体产生的新感染的分布。设 $t \geq s$, $Y(t, s)\tilde{F}(s)I(s)$ 为在 s 时刻新感染的个体且在 t 时刻仍留在感染仓室的感染个体的分布, 则其从 $-\infty$ 到 t 的积分为

$$\int_{-\infty}^t Y(t, s)\tilde{F}(s)I(s)ds = \int_0^\infty Y(t, t-a)\tilde{F}(t-a)I(t-a)da,$$

该积分的意义为到时间 t 之前所有新增感染者的分布。

设 $C_\omega = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$ 为巴拿赫空间中以 ω 为周期的连续函数, 定义其最大范数的表示为 $\|\cdot\|_c$ 。故有 $\|I(s)\|_c = \max_{s \in [0, \omega]} \|I(s)\|_1$, $C_\omega^+ = \{I(s) \in C_\omega : I(s) > 0, s \in \mathbb{R}\}$ 。

定义 $L(C_\omega \rightarrow C_\omega)$ 为下一个感染算子,

$$L(I)(t) = \int_{-\infty}^t Y(t, s)\tilde{F}(s)I(s)ds = \int_0^\infty Y(t, t-a)\tilde{F}(t-a)I(t-a)da。$$

L 的谱半径定义为基本再生数, 即

$$R_0 := \rho(L)。 \quad (6)$$

下面给出算子 L 的一些性质。

定理 2.1 算子 L 是正的、连续的、紧的。

证明 易得算子 L 在 C_ω 上是正的。注意到 $Y(t + \omega, t + \omega - a) = e^{-V_a}$ 和 $I(t)$ 的周期性, 显然 L 为 $C_\omega \rightarrow C_\omega$ 上的算子。

用符号 $\|\cdot\|_1$ 来表示向量和矩阵的 1 范数。 $\exists K > 0, k > 0$ 使得

$$\|Y(t, s)\|_1 \leq Ke^{-k(t-s)}, \quad \forall t \geq s, s \in \mathbb{R},$$

$\exists K_1 > 0$, 使 $\|\tilde{F}(t)\|_1 < K_1, \forall t \in \mathbb{R}, a \in [0, +\infty)$, 则有

$$\|Y(t, t-a)\tilde{F}(t-a)\|_1 \leq KK_1e^{-ka}, \quad (7)$$

故

$$\begin{aligned} \|L(I)(t)\|_1 &= \left\| \int_0^\infty Y(t, t-a)\tilde{F}(t-a)I(t-a)da \right\|_1 = \\ &= \left\| \sum_{j=0}^\infty \int_{j\omega}^{(j+1)\omega} Y(t, t-a)\tilde{F}(t-a)I(t-a)da \right\|_1 \leq \\ &= \sum_{j=0}^\infty \int_{j\omega}^{(j+1)\omega} \|Y(t, t-a)\tilde{F}(t-a)I(t-a)\|_1 da \leq \\ &= \sum_{j=0}^\infty \int_{j\omega}^{(j+1)\omega} KK_1e^{-ka} \|I(t-a)\|_1 da \leq \\ &= \omega KK_1 \sum_{j=0}^\infty e^{-kj\omega} \cdot \|I\|_c, \end{aligned}$$

由于 $\sum_{j=0}^\infty e^{-kj\omega}$ 收敛, 得 L 为有界算子, 故 L 连续, 且在 C_ω 的任意有界集 Φ 上 $\{L(I)\}$ 一致有界。

下证在 C_ω 的任意有界集 Φ 上 $\{L(I)\}$ 等度连续。

注意到 V 可相似对角化, 即存在可逆矩阵 T 使 $V = T^{-1}vT$, 其中, $v = \text{diag}(V)$, 则有 $e^{Vt} = T^{-1}e^{vt}T$ 。

对 $I(t) \in \Phi, \forall t_1, t_2 \in [0, \omega] (t_1 < t_2)$, 由拉格朗日中值定理得 $\exists \xi \in (t_1, t_2)$, 使得 $\|e^{-V_{t_2}} - e^{-V_{t_1}}\|_1 = \|V\|_1 e^{\|V\|_1 t} (t_2 - t_1)$ 。

$$\begin{aligned} \|L(I)(t_2) - L(I)(t_1)\|_1 &= \left\| \int_{-\infty}^{t_2} Y(t_2, s) \tilde{F}(s) I(s) ds - \int_{-\infty}^{t_1} Y(t_1, s) \tilde{F}(s) I(s) ds \right\|_1 = \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{t_2} (Y(t_2, s) - Y(t_1, s)) \tilde{F}(s) I(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} Y(t_1, s) \tilde{F}(s) I(s) ds \right\|_1 \leq \\ &= \int_{-\infty}^{t_2} \|e^{-V(t_2-s)} - e^{-V(t_1-s)}\|_1 \|\tilde{F}(s)\|_1 \|I(s)\|_1 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|Y(t_1, s)\|_1 \|\tilde{F}(s)\|_1 \|I(s)\|_1 ds \leq \\ &= \sum_{i=-\infty}^0 KK_1 \|I(t)\|_c \int_{i\omega}^{(i+1)\omega} \|e^{-V_{t_2}} - e^{-V_{t_1}}\|_1 e^{V_s} \|I(s)\|_1 ds + \int_{t_1}^{t_2} Ke^{-k(t_1-s)} K_1 \|I(s)\|_1 ds \leq \\ &= KK_1 \|I\|_c \|V\|_1 e^{\|V\|_1 \omega} (t_2 - t_1) \|T^{-1}\|_1 \|T\|_1 \sum_{i=-\infty}^0 e^{\tilde{D}(i+1)\omega} + KK_1 e^{k\omega} \|I\|_c (t_2 - t_1), \end{aligned}$$

其中, $\tilde{D} = \max\{\mu + r_a, \mu + d + r_b, \mu + \delta_h, \mu + d + \delta_n\}$ 。于是, 在 C_ω 的任意有界集 Φ 上, 因 $\{I(t)\}$ 有界, 所以 $\{L(I)\}$ 等度连续。由 Ascoli-Arzelà 定理可知, 算子 L 是紧的。

考虑如下周期线性系统:

$$\frac{dw}{dt} = \left(-V(t) + \frac{\tilde{F}(t)}{\lambda} \right) w, \quad (8)$$

设 $W_\lambda(t, s) (t \geq s)$ 为周期线性系统(8)的基解矩阵, 其中 $\lambda \in (0, +\infty)$ 。

考虑 λ 方程:

$$\rho(W_\lambda(\omega, 0)) = 1. \quad (9)$$

引理 2.1 (1) 若 $\lambda_0 > 0$ 是方程(9)的一个正解, 那么 λ_0 是算子 L 的特征值且 $R_0 > 0$ 。(2) 如果 $R_0 > 0$, 则 $\lambda = R_0$ 是方程(9)唯一的解。

由文献[6]定理 2.1 类似的证明方法可证引理 2.1 成立。

下面给出本系统的基本再生数。

定理 2.2 系统(1)的基本再生数为

$$R_0 = \begin{cases} R_0', \Delta > \frac{\mu\lambda(r_a - r_b - d)}{A}, \\ R_0'', \Delta \leq \frac{\mu\lambda(r_a - r_b - d)}{A}, \end{cases}$$

其中,

$$R_0' = \frac{A[\beta_{a1}(1-\theta) + \beta_{a2}\theta]}{\mu(\mu + r_a)},$$

$$R_0'' = \frac{A[\beta_2\theta + \beta_1(1-\theta)]}{\mu(\mu + r_b + d)},$$

$$\Delta = (1-\theta)(\beta_{a1} - \beta_1) + \theta(\beta_{a2} - \beta_2).$$

证明 首先计算系统(8)的标准基解矩阵。

当 $t \in J_i, i = 1, 2$ 时,

$$A_i = -V + \frac{F_i}{\lambda} = \begin{pmatrix} Z_i & 0 \\ B & T_1 \end{pmatrix},$$

其中,

$$Z_i = \begin{pmatrix} -\mu - r_a + \frac{A\beta_{ai}}{\mu\lambda} & \frac{A\beta_{bi}}{\mu\lambda} \\ 0 & -r_b - \mu - d + \frac{A\beta_i}{\mu\lambda} \end{pmatrix},$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} -\mu - \delta_h & 0 \\ 0 & -\mu - d - \delta_H \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} r_a & 0 \\ 0 & r_b \end{pmatrix},$$

则系统 $\frac{dw}{dt} = A_i w$ 的标准基解矩阵为 $e^{A_i t}$ 。得到方程(8)的标准基解矩阵为:

$$W_\lambda(t, 0) = \begin{cases} e^{A_1 t}, t \in [0, (1-\theta)\omega), \\ \tilde{M}, t \in [(1-\theta)\omega, \omega), \end{cases}$$

其中, $\tilde{M} = e^{A_2[t-(1-\theta)\omega]} \cdot e^{A_1(1-\theta)\omega}$, 故 $W_\lambda(\omega, 0) = e^{A_2 \cdot \theta\omega} \cdot e^{A_1 \cdot (1-\theta)\omega}$ 。

其次, 易得矩阵 $W_\lambda(\omega, 0)$ 的特征值为

$$\lambda_1 = e^{\left(-\mu - r_a + \frac{A\beta_{a1}}{\mu\lambda}\right) \cdot \theta\omega + \left(-\mu - r_a + \frac{A\beta_{a1}}{\mu\lambda}\right) \cdot (1-\theta)\omega},$$

$$\lambda_2 = e^{\left(-r_b - \mu - d + \frac{A\beta_{b1}}{\mu\lambda}\right) \cdot \theta\omega + \left(-r_b - \mu - d + \frac{A\beta_{b1}}{\mu\lambda}\right) \cdot (1-\theta)\omega},$$

$$\lambda_3 = e^{(-\mu - \delta_h)\theta\omega + (-\mu - \delta_h)(1-\theta)\omega},$$

$$\lambda_4 = e^{(-\mu - d - \delta_H)\theta\omega + (-\mu - d - \delta_H)(1-\theta)\omega},$$

则有 $\rho(W_\lambda(\omega, 0)) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, 由指数函数单调递增的性质可知

$$\rho(W_\lambda(\omega, 0)) = \begin{cases} \lambda_1, \Delta > \frac{\mu\lambda(r_a - r_b - d)}{A}, \\ \lambda_2, \Delta \leq \frac{\mu\lambda(r_a - r_b - d)}{A}. \end{cases}$$

最后, 利用引理2.1可知, 定理2.2成立。

本文也适用于多阶段的不连续周期系统的基本再生数计算。

3 结论

本文利用积分算子和谱半径等方法计算出周期不连续传染病模型的基本再生数。由于该模型是在采取隔离措施的基础上进行研究, 故后续将移除隔离仓室对其进行讨论, 并结合实际数据对模型进行数值模拟, 为预测相关传染病发展趋势提供思路。

参考文献:

- [1] CHANG S L, PIRAVEENAN M, PATTISON P, et al. Game theoretic modelling of infectious disease dynamics and intervention methods: a review[J]. Journal of Biological Dynamics, 2020, 14(1): 57-89.
- [2] 丰利香, 王德芬. 具有隔离和不完全治疗的传染病模型的全局稳定性[J]. 数学物理学报, 2021, 41(4): 1235-1248.
- [3] 张菊平, 李云, 姚美萍, 等. 武汉市 COVID-19 疫情与易感人群软隔离强度关系分析[J]. 应用数学学报, 2020, 43(2): 162-173.
- [4] 王双明, 樊馨蔓, 张明军, 等. 具周期性潜伏期的 SEIR 传染病模型的动力学[J]. 数学物理学报, 2020, 40(2): 527-539.
- [5] GUO Z, HUANG L, ZOU X. Impact of discontinuous treatments on disease dynamics in an SIR epidemic model[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2012, 9(1): 97-110.
- [6] WANG W D, ZHAO X Q. Threshold dynamics for compartmental epidemic models in periodic environments[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2008, 20(3): 699-717.
- [7] TANG Y L, XIAO D M, ZHANG W N, et al. Dynamics of epidemic models with asymptomatic infection and seasonal succession[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2017, 14(5/6): 1407-1424.