Doi:10.12051/j.issn.1674-4942.2023.01.001

导数Hardy空间上的广义Cesaro算子

林庆泽
(中山大学 数学学院,广东 广州 510275)

摘 要:本文利用加权复合算子在Hardy空间上的性质给出了广义Cesaro算子在导数Hardy空间上的有界性和紧性的完整刻画,接着刻画了广义Cesaro算子的伴随算子的泰勒展开式,最后研究了广义Cesaro算子在导数Hardy空间上的严格奇异性。

关键词:广义Cesaro算子;导数Hardy空间;严格奇异性;有界性;紧性

中图分类号:O177.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1674-4942(2023)01-0001-06

Generalized Cesaro Operators on Derivative Hardy Spaces

LIN Qingze
(*School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou* 510275, *China*)

Abstract: In this paper, by using the properties of weighted composite operators on Hardy spaces, the complete characterizations of the boundedness and compactness of the generalized Cesaro operators on derivative Hardy spaces are obtained. Then, the Taylor expansions of the adjoints of generalized Cesaro operators are described. Finally, the strict singularities of generalized Cesaro operator on derivative Hardy spaces are investigated.

Keywords: generalized Cesaro operator; derivative Hardy space; strict singularity; boundedness; compactness

对于$0 < p < \infty$,Hardy空间H^p的定义如下:

$$H^p = \left\{ f \in H(\Delta): \| f \|_{H^p} \equiv \left(\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_{\partial\Delta} \left| f(r\xi) \right|^p \mathrm{d}m(\xi) \right\} \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

其中$H(\Delta)$表示复平面单位圆盘$\Delta: = \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$上所有解析函数$f$组成的函数空间,$m$是边界$\partial\Delta$上的Lebesgue测度且$m(\partial\Delta) = 1$。由文献[1]可知,上面的范数等于下面的范数定义:

$$\| f \|_{H^p} \equiv \left(\int_{\partial\Delta} \left| f(\xi) \right|^p \mathrm{d}m(\xi) \right)^{1/p},$$

其中对于任意的$\xi \in \partial\Delta$, $f(\xi)$是f在边界$\partial\Delta$上的径向极限。

而当$p = \infty$时,则用H^∞表示单位圆盘Δ上所有有界解析函数f组成的函数空间:

$$H^\infty = \left\{ f \in H(\Delta): \| f \|_\infty: = \sup_{z \in \Delta} \left\{ \left| f(z) \right| \right\} < \infty \right\}。$$

对于$g \in H(\Delta)$,Volterra型算子T_g及其伴侣算子S_g(亦称为Cesaro型算子)的定义分别如下:

$$\left(T_g f\right)(z) = \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta) \mathrm{d}\zeta, \quad \left(S_g f\right)(z) = \int_0^z f'(\zeta) g(\zeta) \mathrm{d}\zeta,$$

其中,$z \in \Delta, f \in H(\Delta)$。

收稿日期:2020-07-09

基金项目:国家自然科学基金项目(11801094)

作者简介:林庆泽(1994—),男,广东揭阳人,博士研究生,研究方向为函数空间与算子理论。E-mail:linqz@mail2.sysu.edu.cn

在20世纪70年代，Pommerenke为了研究BMOA函数的增长性首次刻画了T_g算子在Hardy-Hilbert空间H^2上的有界性[2]。在此工作基础上，Aleman、Siskakis和Cima系统地研究了T_g算子在Hardy空间$H^p(0 < p < \infty)$上的有界性和紧性条件[3-4]。同时，Aleman和Siskakis也研究了T_g算子在Bergman空间上的有界性和紧性[5]。文献[6-14]进行了这类算子在其他一些函数空间(包括加权Dirichlet空间、加权Banach空间及Fock空间等)的一些研究。

2018年，Lin等首次研究了Volterra型算子在导数Hardy空间上的有界性[15]. 对于$0 < p \leqslant \infty$，导数Hardy空间S^p的定义如下：

$$S^p = \left\{ f \in H(\Delta) : \| f \|_{S^p} := \left| f(0) \right| + \| f' \|_{H^p} < \infty \right\}。$$

文献[15-19]在研究中使用到了导数Hardy空间S^p的一些基本结构性质。本文的研究需要用到加权复合算子的相关性质。对于给定的$\varphi \in H(\Delta)$以及Δ的解析自映射ϕ，加权复合算子$W_{\varphi,\phi}$的定义如下：

$$\left(W_{\varphi,\phi} f \right)(z) = \varphi(z) \cdot \left(f \circ \phi \right)(z),$$

其中，$z \in \Delta, f \in H(\Delta)$。关于加权复合算子$W_{\varphi,\phi}$在Hardy空间、加权Bergman空间及加权Dirichlet空间上的相关研究可参考文献[20-24]。

对于导数Hardy空间上的算子的研究可追溯到Roan的关于复合算子在导数Hardy空间上的有界性的研究工作[25]。随后，MacCluer用Carleson测度刻画了导数Hardy空间上的复合算子的有界性和紧性[26]。Contreras和Hernandez-Diaz将导数Hardy空间上的加权复合算子的有界性和紧性的研究转化为研究Hardy空间上的加权复合算子的有界性和紧性[16]。值得注意的是，Novinger和Oberlin证明了导数Hardy空间上的线性等距算子具有加权复合算子的形式[27]。

在本文中，给定$g \in H(\Delta)$，我们将继续研究作用在导数Hardy空间上的下面两类广义Cesaro算子：

$$\left(T_g^{\phi} f \right)(z) = \int_0^{\phi(z)} f(\zeta) g'(\zeta) \mathrm{d}\zeta, \quad \left(S_g^{\phi} f \right)(z) = \int_0^{\phi(z)} f'(\zeta) g(\zeta) \mathrm{d}\zeta,$$

其中，$z \in \Delta, f \in H(\Delta)$。这两类算子(也称为广义Volterra型算子)由Li和SteviĆ所引进并很快吸引了大量学者的研究兴趣[28-29]。最近，Mengestie研究了广义Cesaro算子在加权Fock空间上的有界性和紧性[30-31]。受文献[14]和文献[16]的启发，本文利用加权复合算子在Hardy空间上的性质给出广义Cesaro算子在导数Hardy空间上的有界性和紧性的完整刻画，推广了文献[15]中的结果，接着刻画了广义Cesaro算子的伴随算子的泰勒展开式，最后研究了广义Cesaro算子在导数Hardy空间上的严格奇异性。在本文中，不失一般性，总是假定$\phi(0) = 0$。

1 广义Cesaro算子在导数Hardy空间上的有界性和紧性

首先，研究广义Cesaro算子$T_g^{\phi}: S^p \to S^q$的有界性和紧性。

定理1 令$1 \leqslant p,q \leqslant \infty$，则算子$T_g^{\phi}: S^p \to S^q$是有界的当且仅当$g \circ \phi \in S^q$。

证明 首先，注意到$\phi(0) = 0$，有

$$\left(W_{(g \circ \phi)',\phi} f \right)(z) = \left(g \circ \phi \right)'(z) \left(f \circ \phi \right)(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\int_0^{\phi(z)} f(\omega) g'(\omega) \mathrm{d}\omega \right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \circ T_g^{\phi}(f) \right)(z),$$

反过来，也有

$$\left(T_g^{\phi} f \right)(z) = \int_0^{\phi(z)} f(\omega) g'(\omega) \mathrm{d}\omega = \int_0^{z} f\left(\phi(\omega) \right) g'\left(\phi(\omega) \right) \phi'(\omega) \mathrm{d}\omega = \left(T_z \circ W_{(g \circ \phi)',\phi}(f) \right)(z),$$

由积分算子$T_z: H^q \to S^q$和微分算子$\frac{d}{dz}: S^q \to H^q$的有界性，得到算子$T_g^{\phi}: S^p \to S^q$的有界性等价于加权复合算子$W_{(g \circ \phi)',\phi}: S^p \to H^q$的有界性。由文献[16]可知，加权复合算子$W_{(g \circ \phi)',\phi}: S^p \to H^q$是有界的当且仅当$\left(g \circ \phi \right)' \in H^q$，亦即$g \circ \phi \in S^q$。证毕。

通过上面的类似证明得到下面关于算子$T_{g,\phi}: S^p \to S^q$的紧性的充要条件。

定理2 令$1 \leqslant p,q \leqslant \infty$，假定算子$T_g^{\phi}: S^p \to S^q$是有界的，则算子$T_g^{\phi}: S^p \to S^q$是紧的当且仅当

(1) $g\circ\phi\in S^q$（即$T_g^\phi:S^p\to S^q$是有界的），如果$(p,q)\neq(1,\infty)$；

(2) $\|\phi\|_{H^\infty}<1$或者$\lim\limits_{|\phi(z)|\to 1^-}\left|(g\circ\phi)'(z)\right|=0$，如果$g\circ\phi\in S^\infty$且$(p,q)=(1,\infty)$。

接下来研究算子$S_g^\phi:S^p\to S^q$的有界性和紧性条件。

定理3　令$1\leqslant p,q\leqslant\infty$. 则算子$S_g^\phi:S^p\to S^q$是有界的当且仅当

(1) $\sup\limits_{a\in\Delta}\int_{\partial\Delta}\left|(g\circ\phi)(\xi)\phi'(\xi)\right|^q\left(\dfrac{1-|a|^2}{\left|1-\bar{a}\phi(\xi)\right|^2}\right)^{q/p}\mathrm{d}m(\xi)<\infty$，如果$1\leqslant p\leqslant q<\infty$；

(2) $\sup\limits_{z\in\Delta}\dfrac{\left|(g\circ\phi)(z)\phi'(z)\right|^p}{1-\left|\phi(z)\right|^2}<\infty$，如果$1\leqslant p<q=\infty$；

(3) $(g\circ\phi)\phi'\in H^q$，如果$\infty=p\geqslant q\geqslant 1$；

(4) $\int_0^{2\pi}\left(\int_{\Gamma(\theta)}\dfrac{\mathrm{d}\mu_{g,\phi}(\omega)}{1-|\omega|^2}\right)^{p/(p-q)}\mathrm{d}\theta<\infty$，其中$\mathrm{d}\mu_{g,\phi}:=\mathrm{d}\nu_{g,\phi}\circ\phi^{-1}$是测度$\mathrm{d}\nu_{g,\phi}(\zeta):=\left|g(\phi(\zeta))\phi'(\zeta)\right|^q\mathrm{d}m(\zeta)$的拉回测度且$\Gamma(\theta)$是实数$\theta$的Stolz角：集合$\{e^{i\theta}\}\cup\left\{z:|z|<\sqrt{1/2}\right\}$的凸壳，如果$\infty>p>q\geqslant 1$。

证明　首先，有恒等式：

$$\left(S_g^\phi f\right)(z)=\int_0^{\phi(z)}f'(\omega)g(\omega)\mathrm{d}\omega=\int_0^z(f'\circ\phi)(\omega)(g\circ\phi)(\omega)\phi'(\omega)\mathrm{d}\omega=\left(T_z\circ W_{(g\circ\phi)\phi',\phi}\circ\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(f)\right)(z),$$

反过来，可以验证下面的恒等式成立：

$$\left(W_{(g\circ\phi)\phi',\phi}f\right)(z)=(f\circ\phi)(z)(g\circ\phi)(z)\phi'(z)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\circ S_g^\phi\circ T_z(f)\right)(z),$$

因此，算子$S_g^\phi:S^p\to S^q$的有界性等价于加权复合算子$W_{(g\circ\phi)\phi',\phi}:H^p\to H^q$的有界性。由文献[20–22]可知，加权复合算子$W_{(g\circ\phi)\phi',\phi}:H^p\to H^q$的有界性分别由定理中的条件(1)~(4)所刻画。证毕。

通过上面的类似证明得到下面关于算子$S_g^\phi:S^p\to S^q$的紧性的充要条件。

定理4　令$1\leqslant p,q\leqslant\infty$，假定算子$S_g^\phi:S^p\to S^q$是有界的，则算子$S_g^\phi:S^p\to S^q$是紧的当且仅当

(1) $\lim\limits_{|a|\to 1^-}\int_{\partial\Delta}\left|(g\circ\phi)(\xi)\phi'(\xi)\right|^q\left(\dfrac{1-|a|^2}{\left|1-\bar{a}\phi(\xi)\right|^2}\right)^{q/p}\mathrm{d}m(\xi)=0$，如果$1\leqslant p\leqslant q<\infty$；

(2) $\lim\limits_{|z|\to 1^-}\dfrac{\left|(g\circ\phi)(z)\phi'(z)\right|^p}{1-\left|\phi(z)\right|^2}=0$或者$\|\phi\|_{H^\infty}<1$，如果$1\leqslant p<q=\infty$；

(3) $(g\circ\phi)\phi'=0$或者$m\left(\xi\in\partial\Delta:\phi^*(\xi)\in\partial\Delta\right)=0$，其中$\phi^*(\xi)$是$\phi$在$\xi\in\partial\Delta$上的径向极限，如果$\infty\geqslant p>q\geqslant 1$；

(4) $\lim\limits_{|z|\to 1^-}\left|(g\circ\phi)(z)\phi'(z)\right|=0$或者$\|\phi\|_{H^\infty}<1$，如果$p=q=\infty$。

2　广义Cesaro算子在导数Hardy空间S^2上的伴随算子

现在考虑导数Hardy空间S^2的一个等价范数$\|f\|^2:=\left|f(0)\right|^2+\|f'\|_{H^2}^2$，该范数可诱导出一个内积

$$\langle f,g\rangle_{S^2}:=f(0)\overline{g(0)}+\langle f',g'\rangle_{H^2}=f(0)\overline{g(0)}+\int_{\partial\Delta}f'(\zeta)\cdot\overline{g'(\zeta)}\mathrm{d}m(\zeta),$$

使得空间S^2构成一个Hilbert空间。这里主要研究广义Cesaro算子在导数Hardy空间S^2上的伴随算子。

定理5　若算子$T_g^\phi:S^2\to S^2$是有界的，则其伴随算子具有如下的级数展开式：

$$\left(\left(T_g^{\phi}\right)^* f\right)(z) = \int_{\partial\Delta} f'(\zeta)\overline{(g\circ\phi)'(\zeta)}\mathrm{d}m(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\partial\Delta}\frac{f'(\zeta)\cdot\overline{(g\circ\phi)'(\zeta)}\cdot\overline{\phi(\zeta)}^{n}}{n}\mathrm{d}m(\zeta)\right)z^n, z\in\Delta。$$

证明 首先,容易验证$\left\{1, z, \frac{z^2}{2}, \cdots, \frac{z^n}{z}, \cdots\right\}$构成了Hilbert空间$S^2$的一组标准正交基,从而可以得到空间$S^2$的再生核表达式:

$$k_z(\omega) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\bar{z}\omega)^n}{n} = 1 + \log\left(\frac{1}{1-\bar{z}\omega}\right),$$

因此,对于任意的$z\in\Delta$,得到

$$\begin{aligned}\left(\left(T_g^{\phi}\right)^* f\right)(z) = &< \left(T_g^{\phi}\right)^* f, k_z >_{S^2} = \\ &< f, T_g^{\phi}k_z >_{S^2} = \\ &< f', \left(T_g^{\phi}k_z\right)' >_{H^2} = \\ &< f', (k_z\circ\phi)(g'\circ\phi)\phi' >_{H^2} = \\ &\int_{\partial\Delta} f'(\zeta)\cdot\overline{k_z(\phi(\zeta))\cdot(g\circ\phi)'(\zeta)}\mathrm{d}m(\zeta) = \\ &\int_{\partial\Delta} f'(\zeta)\cdot\overline{(g\circ\phi)'(\zeta)}\cdot\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(z\overline{\phi(\zeta)}\right)^n}{n}\right)\mathrm{d}m(\zeta) = \\ &\int_{\partial\Delta} f'(\zeta)\overline{(g\circ\phi)'(\zeta)}\mathrm{d}m(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\partial\Delta}\frac{f'(\zeta)\cdot\overline{(g\circ\phi)'(\zeta)}\cdot\overline{\phi(\zeta)}^{n}}{n}\mathrm{d}m(\zeta)\right)z^n,\end{aligned}$$

从而定理得证。

类似于定理5的证明,得到:

定理6 若算子$S_g^{\phi}: S^2\rightarrow S^2$是有界的,则其伴随算子具有如下的级数展开式:

$$\left(\left(S_g^{\phi}\right)^* f\right)(z) = \int_{\partial\Delta} f'(\zeta)\overline{(g\circ\phi)(\zeta)\phi'(\zeta)\phi(\zeta)}\mathrm{d}m(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\partial\Delta} f'(\zeta)\cdot\overline{(g\circ\phi)(\zeta)\phi'(\zeta)}\cdot\overline{\phi(\zeta)}^{n+1}\mathrm{d}m(\zeta)\right)z^n,$$

其中$z\in\Delta$。

3 广义Cesaro算子在导数Hardy空间上的严格奇异性

如果一个有界线性算子$T: X_1\rightarrow X_2$(其中X_1和X_2是Banach空间)限制在X_1的任何一个无穷维闭子空间Y上所诱导出的线性算子$T_{|Y}: Y\rightarrow T(Y)$都不可能是同构映射,则称算子$T: X_1\rightarrow X_2$为严格奇异的。类似地,如果一个有界线性算子$T: X_1\rightarrow X_2$(其中$X_1$和$X_2$是Banach空间)限制在$X_1$的任何一个同构于$l^p$空间的无穷维闭子空间$Y$上所诱导出的线性算子$T_{|Y}: Y\rightarrow T(Y)$都不可能是同构映射,则称算子$T: X_1\rightarrow X_2$为$l^p$-奇异的。一个有界线性算子是紧的则必为严格奇异的,亦必为l^p-奇异的,反之不然[32-34]。

近年来,Miihkinen等证明了T_g算子在Hardy空间上的紧性与其严格奇异性的等价关系[32-33],其证明思路来源于文献[34]中对于复合算子在Hardy空间上的严格奇异性的研究。最近,文献[35]将文献[34]中的结论推广到加权复合算子的情形。受这些研究工作的启发,林庆泽等研究了一些算子在Hardy空间上、Bergman空间和导数Hardy空间上的严格奇异性问题[36-39]。

定理7 令$1\leqslant p\leqslant\infty$,若算子$T_g^{\phi}: S^p\rightarrow S^p$是有界的,则该算子必是严格奇异的。

证明 由定理1和定理2可知,算子$T_g^{\phi}: S^p\rightarrow S^p$是有界的当且仅当该算子是紧的,而紧算子必是严格奇异的。证毕。

定理8 令$1\leqslant p<\infty$,若算子$S_g^{\phi}: S^p\rightarrow S^p$是有界的,则

(1)算子$S_g^{\phi}: S^p\rightarrow S^p$是严格奇异的当且仅当该算子是紧的;

(2)如果$(g\circ\phi)\phi'\neq 0$且$m\left(\xi\in\partial\Delta: \phi^*(\xi)\in\partial\Delta\right)>0$,则算子$S_g^{\phi}: S^p\rightarrow S^p$不是$l^2$-奇异的;

（3）如果$m\left(\xi \in \partial\Delta:\phi^*\left(\xi\right) \in \partial\Delta\right) = 0$且算子$S_g^\phi$在$S^p$一个无穷维子空间$M$上下有界，则算子$S_g^\phi:S^p \to S^p$不是$l^p$-奇异的。特别地，如果$m\left(\xi \in \partial\Delta:\phi^*\left(\xi\right) \in \partial\Delta\right) = 0$且$p \neq 2$，则算子$S_g^\phi:S^p \to S^p$是$l^2$-奇异的。

证明　由定理3、定理4以及文献[35]可推出。证毕。

定理9　若算子$S_g^\phi:S^\infty \to S^\infty$是有界的，则该算子是严格奇异的当且仅当该算子是紧的。

证明　由文献[40]可知，H^∞上的每一个弱紧线性算子都是紧的，而由文献[41]可知，H^∞上的一个有界线性算子是弱紧的当且仅当该算子是l^∞-奇异的，因此，由定理4可知，算子$S_g^\phi:S^\infty \to S^\infty$是紧的当且仅当该算子是$l^\infty$-奇异的。又因为紧算子必是严格奇异的，而且严格奇异的算子必是l^∞-奇异的，故算子$S_g^\phi:S^\infty \to S^\infty$是紧的当且仅当该算子是严格奇异的。

参考文献：

[1] DUREN P L. Theory of H^p spaces[M]. New York:Academic Press，1970.

[2] POMMERENKE CH. Schlichte funktionen und analytische funktionen von beschränkter mittlerer oszillation[J]. Commentarii Mathematici Helvetici，1977，52（4）：591-602.

[3] ALEMAN A，CIMA J A. An integral operator on H^p and Hardy′s inequality[J]. Journal d′Analyse Mathématique，2001，85（1）：157-176.

[4] ALEMAN A，SISKAKIS A G. An integral operator on H^p[J]. Complex Variables，1995，28（2）：149-158.

[5] ALEMAN A，SISKAKIS A G. Integration operators on Bergman spaces[J]. Indiana University Mathematics Journal，1997，46（2）.

[6] GALANOPOULOS P，GIRELA D，PELÁEZ J Á. Multipliers and integration operators on Dirichlet spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society，2011，363（4）：1855.

[7] XIAO J. The Qp Carleson measure problem[J]. Advances in Mathematics，2008，217（5）：2075-2088.

[8] ANDERSON A，JOVOVIC M，SMITH W. Some integral operators acting on H^∞[J]. Integral Equations and Operator Theory，2014，80（2）：275-291.

[9] CONSTANTIN O. A Volterra-type integration operator on Fock spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society，2012，140（12）：4247-4257.

[10] CONTRERAS M D，PELÁEZ J A，POMMERENKE C，et al. Integral operators mapping into the space of bounded analytic functions[J]. Journal of Functional Analysis，2016，271（10）：2899-2943.

[11] LIN Q Z. Volterra type operators between Bloch type spaces and weighted Banach spaces[J]. Integral Equations and Operator Theory，2019，91（2）：1-20.

[12] SMITH W，STOLYAROV D M，VOLBERG A. Uniform approximation of Bloch functions and the boundedness of the integration operator on H^∞[J]. Advances in Mathematics，2017，314（1）：185-202.

[13] 林庆泽. Volterra型算子在对数加权Banach空间之间的有界性和紧性[J]. 应用泛函分析学报，2019，21（1）：66-75.

[14] 林庆泽. 复平面加权Banach空间及Bloch型空间上的Volterra型算子[J]. 汕头大学学报(自然科学版)，2020，35（1）：66-70.

[15] LIN Q Z，LIU J M，WU Y T. Volterra type operators on S^p(D) spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2018，461（2）：1100-1114.

[16] CONTRERAS M D，HERNÁNDEZ-DÍAZ A G. Weighted composition operators of spaces of functions with derivative in a Hardy space[J]. Journal of Operator Theory，2004，52（1）：173-184.

[17] COWEN C C，MACCLUER B D. Composition operators on spaces of analytic functions[M]. Boca Raton:CRC Press，1995.

[18] ČUČKOVIĆ Ž，PAUDYAL B. Invariant subspaces of the shift plus complex Volterra operator[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2015，426（2）：1174-1181.

[19] GU C X，LUO S B. Composition and multiplication operators on the derivative Hardy space[J]. Complex Variables and Elliptic Equations，2018，63（5）：599-624.

[20] CONTRERAS M D，HERNÁNDEZ-DÍAZ A G. Weighted composition operators between different Hardy spaces[J]. Integral Equations and Operator Theory，2003，46（2）：165-188.

[21] CUCKOVIĆ Z，ZHAO R H. Weighted composition operators between different weighted Bergman spaces and different Hardy spaces[J]. Illinois Journal of Mathematics，2007，51（2）：479-498.

[22] DEMAZEUX R. Essential norms of weighted composition operators between Hardy spaces H^p and H^q for $1 \leqslant p，q \leqslant \infty$[J]. Studia

Mathematica, 2011, 206(3): 191-209.

[23] CHALENDAR I, GALLARDO-GUTIÉRREZ E A, PARTINGTON J R. Weighted composition operators on the Dirichlet space: boundedness and spectral properties[J]. Mathematische Annalen, 2015, 363(3): 1265-1279.

[24] 林庆泽. 关于加权复合算子在加权Dirichlet空间上的有界性[J]. 应用泛函分析学报, 2018, 20(4): 369-376.

[25] ROAN R. Composition operators on the space of functions with H^p-derivative[J]. Houston Journal of Mathematics, 1978, 4(3): 423-428.

[26] MACCLUER B D. Composition operators on S^p[J]. Houston Journal of Mathematics, 1987, 13(2): 245-254.

[27] NOVINGER W P, OBERLIN D M. Linear isometries of some normed spaces of analytic functions[J]. Canadian Journal of Mathematics, 1985, 37(1): 62-74.

[28] LI S X, STEVIĆ S. Generalized composition operators on zygmund spaces and Bloch type spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 338(2): 1282-1295.

[29] LI S X, STEVIĆ S. Products of Volterra type operator and composition operator from H^∞ and Bloch spaces to Zygmund spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 345(1): 40-52.

[30] MENGESTIE T. Product of Volterra type integral and composition operators on weighted Fock spaces[J]. The Journal of Geometric Analysis, 2014, 24(2): 740-755.

[31] MENGESTIE T. Generalized Volterra companion operators on Fock spaces[J]. Potential Analysis, 2016, 44(3): 579-599.

[32] MIIHKINEN S. Strict singularity of a Volterra-type integral operator on H^p[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2017, 145(1): 165-175.

[33] MIIHKINEN S, NIEMINEN P J, SAKSMAN E, et al. Structural rigidity of generalised Volterra operators on H^p[J]. Bulletin Des Sciences Mathématiques, 2018, 148(1): 1-13.

[34] LAITILA J, NIEMINEN P J, SAKSMAN E, et al. Rigidity of composition operators on the Hardy space H^p[J]. Advances in Mathematics, 2017, 319(1): 610-629.

[35] LINDSTRÖM M, MIIHKINEN S, NIEMINEN P J. Rigidity of weighted composition operators on H^p[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, 2020, 45(2): 825-828.

[36] 林庆泽. Volterra型算子在Hardy空间和Bergman空间上的严格奇异性[J]. 汕头大学学报(自然科学版), 2020, 35(1): 41-45.

[37] 林庆泽. 乘法算子在导数Hardy空间上的严格奇异性[J]. 乐山师范学院学报, 2019, 34(12): 14-17.

[38] 林庆泽, 刘军明, 吴玉田. 复合算子在导数Hardy空间上的严格奇异性[J]. 海南师范大学学报(自然科学版), 2019, 32(3): 295-298.

[39] LIN Q Z, LIU J M, WU Y T. Strict singularity of Volterra type operators on Hardy spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 492(1): 124438.

[40] CONTRERAS M D, DÍAZ-MADRIGAL S. Compact-type operators defined on H^∞[C]// Function Spaces. Providence: American Mathematical Society, 1999: 111-118.

[41] BOURGAIN J. New Banach space properties of the disc algebra and H^∞[J]. Acta Mathematica, 1984, 152(1): 1-48.

(责任编辑:刘　炜)