Doi:10.12051/j.issn.1674-4942.2022.02.011

行数为2的变换图的若干性质

金晶晶
(福建船政交通职业学院 通识教育学院,福建 福州 350007)

摘 要:著名的图论专家Brualdi于1980年提出了关于变换图$G(R,S)$直径的Brualdi猜想,但至今仍悬而未决。本文定义行数为2的变换图$G(R,S)$为$G(R^*,S^*)$,其顶点数为$\binom{n}{r}$,边数为$\frac{r(n-r)}{2}\binom{n}{r}$,当$r\leqslant\frac{n}{2}$时,$G(R^*,S^*)$是二部图,当且仅当$n=2$;$G(R^*,S^*)$是完全图,当且仅当$r=1$。根据变换图的性质,结合$G(R^*,S^*)$的最大团结构,对变换图$G(1,4)$、$G(2,4)$、$G(2,5)$和$G(2,6)$进行了作图。

关键词:变换图;(0,1)-矩阵;向量;直径;同构
中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1674-4942(2022)02-0170-05

Some Properties of Interchange Graph with Row Number Being 2

JIN Jingjing
(*College of General Education, Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou* 350007, *China*)

Abstract: The Brualdi's Conjecture concerning the diameter of the interchange graph $G(R,S)$was raised in 1980 by Brualdi, a famous expert of graph theory. However, it still remains open now. In this paper, the interchange graph $G(R,S)$ with row number being 2 is defined as $G(R^*,S^*)$. The vertex number is $\binom{n}{r}$ and the edge number is $\frac{r(n-r)}{2}\binom{n}{r}$. $G(R^*,S^*)(r\leqslant\frac{n}{2})$ is bipartite if and only if $n=2$; $G(R^*,S^*)$ $(r\leqslant\frac{n}{2})$ is a complete graph if and only if $r=1$. Moreover, according to the properties and the maximum clique structure of $G(R^*,S^*)$, the interchange graph $G(1,4)$、$G(2,4)$、$G(2,5)$、$G(2,6)$ are plotted .

Keywords:interchange graph;(0, 1)- matrix;vector;diameter;isomorphism

1980年,著名的图论专家Brualdi定义了$U(R,S)$上的变换图$G(R,S)$[1]。设$m\geqslant 2$和$n\geqslant 2$为正整数,$R=(r_1,r_2,...,r_m)$和$S=(s_1,s_2,...,s_n)$为正整数向量,满足$\sum_{i=1}^{m}r_i=\sum_{j=1}^{n}s_i$。$U(R,S)$表示满足下列条件的$m\times n$阶(0,1)矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的集合,其中,$A$的行和向量为$R$,列和向量为$S$,即:

$$a_{ij}=0\text{或}1(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=r_i(i=1,2,\cdots,m),\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}=s_j(j=1,2,\cdots,n)。$$

收稿日期:2022-03-03
基金项目:福建省中青年教师教育科研项目(JAT210722)
作者简介:金晶晶(1983—),福建福州人,副教授,研究方向为组合数学与图论。E-mail:5200591@163.com

令$A \in U(R,S)$,A的一个变换(interchange)是指将A的一个$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$(或$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$)的$2\times 2$阶子矩阵替换成$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$(或$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$)的一个作用。显然,一个变换不改变$A$的行和向量与列和向量,只是将$U(R,S)$中的一个矩阵变成了$U(R,S)$中另外一个矩阵。近年来,矩阵类$U(R,S)$的一些性质在网络流理论、组合矩阵论中得到广泛应用[1]。$U(R,S)$上的变换图$G(R,S)$定义为无向简单图,其顶点集$V(G(R,S))=U(R,S)$,并且$U(R,S)$中的两个矩阵是相邻的当且仅当其中一个矩阵能经过一次变换得到另外一个矩阵[1]。

Brualdi于1980年提出关于变换图$G(R,S)$直径的Brualdi猜想[1]:$D(G(R,S))\leqslant\frac{m\cdot n}{4}$,一直悬而未决。到了2002年,钱建国给出了一个新的上界[2]。至今,许多国内外学者对变换图$G(R,S)$的性质进行了广泛的研究[3-7],例如陈荣斯等证明了变换图的连通度等于其最小度[5],李学良等证明了当S是一个三维向量或者$R=S=(1,1,\cdots,1)$时,G是哈密尔顿的[6]。

但由于$U(R,S)$的复杂性,关于变换图$G(R,S)$性质和结构刻画的研究较少。变换图$G(R,S)$的性质是Brualdi猜想研究的重要工具。为了深入研究变换图$G(R,S)$的性质,本文研究了行数为2的变换图$G(R^*,S^*)$,其中,$R^*=(r_1,r_2)$且$S^*=(1,\cdots,1)$。

1 主要结果

对于行数为2的变换图$G(R^*,S^*)$,若$a_{1j}=1$,则$a_{2j}=0$,$j=1,2,\cdots,n$;反之亦然。这就意味着A完全由第一行来决定。显然,A的第一行A'是包含r_1个"1"和$n-r_1$个"0"的行向量;行数为2的变换图$G(R^*,S^*)$是变换图$G(R,S)$的子图,$G(R^*,S^*)$的矩阵类$U(R^*,S^*)$是$G(R,S)$的矩阵类$U(R,S)$的2×2子矩阵类,$G(R^*,S^*)$局部刻画了$G(R,S)$的性质和内在结构。定义$H(r,n)$为所有由"0"和"1"组成的n维行向量的集合,其中$r(\geqslant 1)$表示每个n维行向量中"1"的个数,显然,$H(r,n)$中每个n维行向量中"0"的个数为$n-r$。设$B\in H(r,n)$,B的一个变换是指将B的一个形如(0,1)(或(1,0))的子向量替换成(1,0)(或(0,1))的一个作用。$G(r,n)$定义为这样的一个无向简单图:其点集是$H(r,n)$,$H(r,n)$中的两个n维行向量是相邻的,当且仅当其中一个n维行向量可以由另外一个n维行向量经过一个变换得到。比较$G(R^*,S^*)$与$G(r,n)$的定义,可得:

定理1　$G(R^*,S^*)$与$G(r,n)$是同构的,其中$R^*=(r_1,r_2)$且$S^*=(1,1,\cdots,1)$,$r=r_1$,$n=r_1+r_2$。

因此,只要研究$G(r,n)$的性质就可得到$G(R^*,S^*)$的相应性质。

定理2　$G(r,n)$同构于$G(n-r,n)$。

证明　$G(r,n)$的矩阵类$H(r,n)$由$G(r,n)$中元素"0"和"1"的对称性得,$G(r,n)$与$G(n-r,n)$具有相同的邻接矩阵,即$G(r,n)$同构于$G(n-r,n)$。

为方便讨论,根据定理2,在下文中,设$r\leqslant\frac{n}{2}$。

定理3　$G(r,n)$是$r(n-r)$正则的,且其顶点数$\left|V(G(r,n))\right|=\binom{n}{r}$,边数$\left|E(G(r,n))\right|=\frac{r(n-r)}{2}\binom{n}{r}$。

证明　不失一般性,$G(r,n)$的矩阵类$H(r,n)$的结构形如:

$$\begin{pmatrix}\overbrace{1,\cdots,1}^{r},\overbrace{0,\cdots,0}^{n-r}\\\underbrace{0,\cdots,0,1,\cdots,1}_{n}\end{pmatrix}$$

$H(r,n)$的r_1行中有r个1、$n-r$个0,r_2行中有r个0、$n-r$个1,根据变换的定义,$G(r,n)$中共有$\binom{n}{r}$个顶点,且其每个顶点可经过$r(n-r)$种不同的变换转化为不同的顶点,即$G(r,n)$中任一顶点的度$d(v)=$

$\binom{r}{1}\binom{n-r}{1}=r(n-r)$,且其边数$\left|E\left(G(r,n)\right)\right|=\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G(r,n))}d(v)=\frac{r(n-r)}{2}\binom{n}{r}$。

定理4 $G(r,n)(r\leqslant\frac{n}{2})$为完全图当且仅当$r=1$。

证明 当$r=1$时,不难验证$G(1,n)$是一个完全图,此处不再赘述。

当$2\leqslant r\leqslant\frac{n}{2}$时,$G(r,n)$中存在以下两个顶点:$v_i=(\cdots1\cdots1\cdots0\cdots0\cdots)$、$v_j=(\cdots0\cdots0\cdots1\cdots1\cdots)$,顶点$v_i$和$v_j$在未标出"0"或"1"的位置上的元素是相同的。显然,v_i不能经过一次变换转化为v_j,即v_i与v_j是不相邻的,所以当$2\leqslant r\leqslant\frac{n}{2}$时,$G(r,n)$不是完全图。因此,$G(r,n)(r\leqslant\frac{n}{2})$是完全图当且仅当$r=1$。

定理5 $G(r,n)(r\leqslant\frac{n}{2})$是二部图,当且仅当$n=2$。

证明 当$n=2$时,$r=1$,$G(1,2)\cong K_2$,是一个二部图。

当$n\geqslant3$时,$G(r,n)$中存在以下3个顶点:$v_i=(\cdots1\cdots0\cdots0\cdots)$、$v_j=(\cdots0\cdots1\cdots0\cdots)$、$v_k=(\cdots0\cdots0\cdots1\cdots)$,顶点$v_i$和$v_j$在未标出"0"或"1"的位置上的元素是相同的,所以$G(r,n)$中存在一个3-圈,$C=\left(v_iv_jv_k\right)$。因此,当$n\geqslant3$时,$G(r,n)$不是二部图。

定理6 当$r_1\leqslant r_2$且$n-r_1\leqslant n-r_2$,$1\leqslant r_i\leqslant\frac{n_i}{2}$时,存在$G\left(r_2,n_2\right)$的子图与$G\left(r_1,n_1\right)$同构。

证明 $G\left(r_1,n_1\right)$的顶点v所对应的行向量是n_1维的,将它扩大为n_2维行向量v',v'与v在第1至第n_1位置上的元素相同,v'在第$n_1+1,n_1+2,\cdots,n_1+r_2-r_1$位置上的元素都是"1",而在第$n_1+r_2-r_1+1,n_1+r_2-r_1+2,\cdots,n_2$位置上的元素都是"0"。记由这些$v'$所生成的图为$G'\left(r_2,n_2\right)$,不难看到,$G'\left(r_2,n_2\right)\cong G\left(r_1,n_1\right)$,且$G'\left(r_2,n_2\right)\cong G\left(r_2,n_2\right)$。

定理6的逆一般不成立。例如,$G(1,6)$是一个6阶完全图,而$G(2,4)$是一个6阶非完全图,所以与$G(1,6)$中的某个子图同构,但是,$2>1$。

另外,$G(r,n)$有较好的连通性,$G(r,n)$的连通度等于其最小度$r(n-r)$[3];$G(r,n)$是哈密尔顿图[5]。

2 几类变换图的作图

下面,根据变换图的性质,对变换图$G(1,4)$、$G(2,4)$、$G(2,5)$和$G(2,6)$进行作图.用$G[C]$表示$G(r,n)$的点集的一个子集C的生成子图。称C为G的一个团,当且仅当$G[C]$为完全图。称$G(r,n)$中点数最多的团为最大团。若$G(r,n)$中的一个顶点所对应的行向量在$i_1,i_2,\cdots,i_t$位置上的元素为"1",其余位置上的元素全为"0",则将该顶点记为$v_{i_1,i_2,\cdots,i_t}$,则变换图$G(1,4)$、$G(2,4)$、$G(2,5)$分别为图1~3:

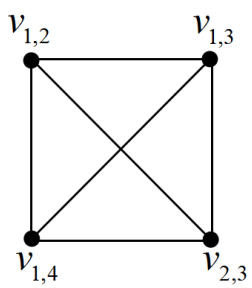

图1 变换图$G(1,4)$

Figure 1 Interchange graph $G(1,4)$

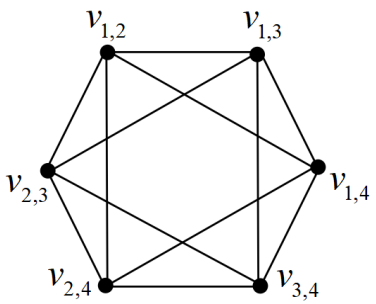

图2 变换图$G(2,4)$

Figure 2 Interchange graph $G(2,4)$

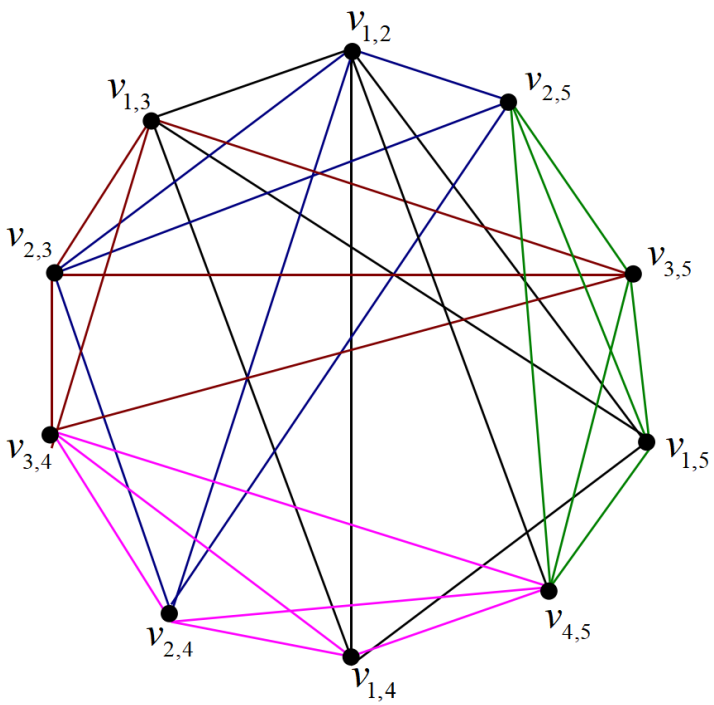

图3　变换图$G(2,5)$

Figure 3　Interchange graph $G(2,5)$

由图1~3可见,$G(1,4)$是完全图;$G(2,4)$有8个最大团,每个最大团的顶点数为3;$G(2,5)$有5个最大团,每个最大团的顶点数为4。

下面,利用变换图的性质和递归构造方法对$G(2,6)$进行作图。根据定理3,$G(2,6)$是8正则的,且其顶点数为$V(G(2,6))=15$,分别是$v_{1,2}$、$v_{1,3}$、$v_{1,4}$、$v_{1,5}$、$v_{1,6}$、$v_{2,3}$、$v_{2,4}$、$v_{2,5}$、$v_{2,6}$、$v_{3,4}$、$v_{3,5}$、$v_{3,6}$、$v_{4,5}$、$v_{4,6}$、$v_{5,6}$,边数$E(G(2,6))=60$。$G(2,6)$共有6个最大团:$C_1=\{v_{1,2},v_{1,3},v_{1,4},v_{1,5},v_{1,6}\}$,$C_2=\{v_{1,2},v_{2,3},v_{2,4},v_{2,5},v_{2,6}\}$,$C_3=\{v_{1,3},v_{2,3},v_{3,4},v_{3,5},v_{3,6}\}$,$C_4=\{v_{1,4},v_{2,4},v_{3,4},v_{4,5},v_{4,6}\}$,$C_5=\{v_{1,5},v_{2,5},v_{3,5},v_{4,5},v_{5,6}\}$,$C_6=\{v_{1,6},v_{2,6},v_{3,6},v_{4,6},v_{5,6}\}$。每个最大团的顶点数是5,边数是10,且每个顶点都包含在2个最大团中,每条边恰包含在1个最大团中。基于以上讨论,按照变换图$G(2,6)$的最大团构造,先画出最大团$C_1=\{v_{1,2},v_{1,3},v_{1,4},v_{1,5},v_{1,6}\}$,再依次按照最大团$C_1$、$C_2$、$C_3$、$C_4$、$C_5$、$C_6$对$G(2,6)$进行作图。

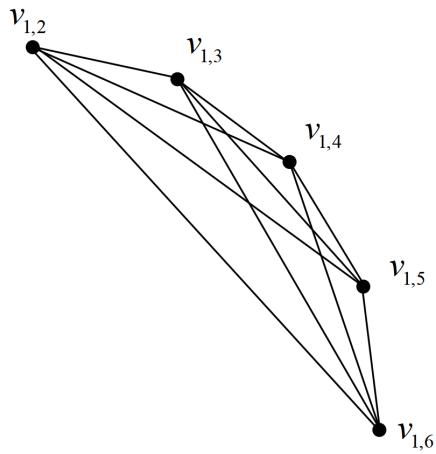

图4　变换图$G(2,6)$中的最大团C_1

Figure 4　The maximum clique of interchange graph $G(2,6)$

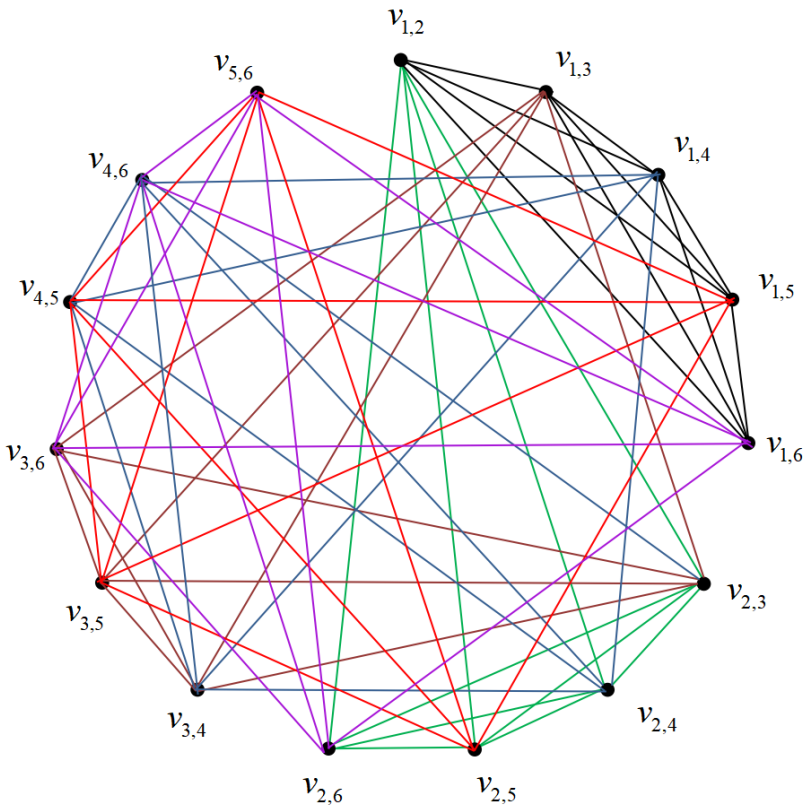

图5 变换图$G(2,6)$

Figure 5 Interchange graph $G(2,6)$

综上,变换图$G(1,5)$、$G(2,7)$和$G(3,6)$亦可按照其性质和最大团的递归构造进行作图,此处不再赘述。

参考文献:

[1] BRUALDI R A. Matrices of zeros and ones with fixed row and column sum vectors[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1980, 33:159-231.

[2] 钱建国. 变换图的直径及Brualdi猜想[J]. 数学学报, 2002, 45(2):411-416.

[3] BRUALDI R A, SHEN J. Disjoint cycles in eulerian digraphs and the diameter of interchange graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2002, 85(2):189-196.

[4] YUSTER R. Packing 4-cycles in eulerian and bipartite eulerian tournaments with an application to distances in interchange graphs [J]. Annals of Combinatorics, 2005, 9(1):117-124.

[5] 陈荣斯, 郭晓峰, 张福基. 一类0.1矩阵变换图的边连通性[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 1988, 5(1):17-25.

[6] LI X L, ZHANG F J. Hamiltonicity of a type of interchange graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 1994, 51(1/2):107-111.

[7] CHEN A H, CHANG J, WANG Y L. The interchange graphs of tournaments with minimum score vectors are exactly hypercubes[J]. Graphs and Combinatorics, 2009, 25(1):27-34.

(责任编辑:刘 炜)