



模糊度量空间中统计收敛的等价刻画

胡杨丽, 李长清*

(闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘要:统计收敛在模糊度量空间中已得到应用,但模糊度量空间中的统计完备与完备的关系尚不明确。鉴于此,本文探讨了完备的模糊度量空间中序列的统计收敛的等价刻画,导出了统计完备与完备的等价性。研究结果完善了模糊度量空间中序列的统计收敛的相关性质。

关键词:模糊度量空间;统计收敛;统计柯西;统计完备;完备

中图分类号:O189.1

文献标志码:A

文章编号:1674-4942(2022)02-0165-05

Equivalent Characterizations of Statistical Convergence in Fuzzy Metric Spaces

HU Yangli, LI Changqing*

(School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: Statistical convergence has been applied in fuzzy metric spaces, but the relationship between statistical completeness and completeness in fuzzy metric spaces is unclear. In view of this, the equivalent characterization of statistical convergence of sequences in complete fuzzy metric spaces was given and the equivalence between statistical completeness and completeness was deduced in this paper. These results improve the properties of statistical convergence of sequences in fuzzy metric spaces.

Keywords: fuzzy metric space; statistical convergence; statistical cauchy; statistical completeness; complete

模糊度量是模糊拓扑学中的一个重要的概念,现已得到众多学者的广泛关注。1994年,George等借助连续 t 模给出了模糊度量空间的概念^[1]。随后,Gregori等证明了模糊度量诱导出的拓扑空间可度量化,并举例说明并非所有的模糊度量空间都可完备^[2-3],这与度量空间都可完备化存在极大区别。

统计收敛作为一般收敛的推广,它的思想最早由Zygmund^[4]提出。1951年,Fast和Steinhaus各自独立定义了实空间序列的统计收敛概念^[5-6]。之后,Fridy介绍了统计收敛在数学不同领域的各种应用^[7-8]。Kostyrko等探讨了度量空间中的统计收敛的概念^[9]。Bilalov等则研究了统计收敛在完备度量空间中的等价性^[10]。最近,文献[11]给出了模糊度量空间中序列的统计收敛、统计柯西和统计完备的概念,并研究了三者间的关系,同时,提出了在模糊度量空间中统计完备与完备是否等价的问题。

为了进一步完善模糊度量空间中统计收敛的相关性质,本文在已有的模糊度量空间中统计收敛、统计柯西和统计完备的概念的基础上证明了完备的模糊度量空间中统计收敛和统计柯西的等价性,并证明了在模糊度量空间中统计完备与完备的一致性。

收稿日期:2021-12-20

基金项目:国家自然科学基金项目(11701258);福建省自然科学基金项目(2020J01801,2022J01912)

第一作者:胡杨丽(1997—),福建漳州人,硕士研究生,研究方向为拓扑学理论与应用。E-mail:1750705066@qq.com

*通信作者:李长清(1979—),福建漳州人,教授,研究方向为拓扑学理论与应用、粗糙集理论与应用。E-mail:hel-en_smile0320@163.com

1 预备知识

在本文中, $\mathbb{N}$ 表示正整数集; A^c 表示集合 $A \subset \mathbb{N}$ 的补集, 即 $A^c = \mathbb{N}/A$; $\bar{F}$ 表示集合 F 的闭包。

定义 1.1^[1] 二元函数 $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 称为连续 t 模, 如果它满足以下条件:

- (1) $*$ 满足结合律和交换律;
- (2) $*$ 是连续的;
- (3) 对任意 $a \in [0, 1]$, $a * 1 = a$;
- (4) 当 $a \leq c$ 和 $b \leq d$ 且 $a, b, c, d \in [0, 1]$ 时, $a * b \leq c * d$ 。

易知, 对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon)$, 使得 $(1 - \varepsilon_1) * (1 - \varepsilon_2) > 1 - \varepsilon$ 。

定义 1.2^[1] 设 X 是任意非空点集, $*$ 是连续 t 模, M 是 $X^2 \times (0, \infty)$ 上的模糊集。三元组 $(X, M, *)$ 被称为模糊度量空间, 若对任意 $x, y, z \in X$ 和 $s, t \in (0, \infty)$ 满足以下条件:

- (i) $M(x, y, t) > 0$;
- (ii) $M(x, y, t) = 1$ 当且仅当 $x = y$;
- (iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;
- (iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$;
- (v) 函数 $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ 是连续的。

若 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, 则可称 $(M, *)$ 为 X 上的模糊度量。

定义 1.3^[1] 设 $(X, M, *)$ 为模糊度量空间, $x \in X, \varepsilon \in (0, 1), t > 0$, 称 $B_M(x, \varepsilon, t) = \{y \in X | M(x, y, t) > 1 - \varepsilon\}$ 为以 x 为中心、 ε 为半径关于 t 的开球。

显然, 在模糊度量空间 $(X, M, *)$ 中, 由集族 $\{B_M(x, \varepsilon, t) | x \in X, \varepsilon \in (0, 1), t > 0\}$ 作为基可诱导出 X 上的拓扑, 记为 τ_M ^[1]。

设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为 X 中的序列, 以下简记 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为 $\{x_n\}$ 。

命题 1.1^[1] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的序列。 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in X$ 当且仅当对 $\forall t > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1$ 。

定义 1.4^[1] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的序列。若对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $t > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $n, m \geq n_0$ 时都有 $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为柯西序列。若 (X, τ_M) 中的任意柯西序列都收敛, 则称 $(X, M, *)$ 为完备的。

定义 1.5^[5-6] 设 $A \subseteq \mathbb{N}$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 记 $A(n) = \{k \leq n | k \in A\}$ 。定义

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A(n)|}{n},$$

此时称 $\delta(A)$ 为 A 的渐近密度。

显然, 若 $\delta(A)$ 存在, 则 $\delta(A) \in [0, 1]$ 且 $\delta(A^c) = 1 - \delta(A)$ 。若 $\delta(A) = 1$, 则称 A 为统计稠密的。

定义 1.6^[11] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的序列。若对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $t > 0$, 都有 $\delta(\{n \in \mathbb{N} | M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon\}) = 1$, 则称 $\{x_n\}$ 统计收敛于 $x \in X$, 记为 $st - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 。

引理 1.1^[10] 设 $\mathcal{H} = \{H \subset \mathbb{N} | \delta(H) = 1\}$, 若 $H_j \in \mathcal{H} (j = 1, 2)$, 则 $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{H}$ 。

定义 1.7^[12] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, F 为 X 的非空子集, $t > 0$ 。定义

$$\text{diam}_t(F) = \sup \{1 - M(x, y, t) | x, y \in F\},$$

则称 $\text{diam}_t(F)$ 为 F 关于 t 的模糊直径。

引理 1.2^[13] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, F 为 X 的非空子集。则对于任意 $t > 0$, F 关于 t 的模糊直径为 0 当且仅当 F 是单点集。

定义 1.8^[1] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的序列。若对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $t > 0$, 存在 $n_{\varepsilon, t} \in \mathbb{N}$, 使得 $\delta(\{n \in \mathbb{N} | M(x_n, x_{n_{\varepsilon, t}}, t) > 1 - \varepsilon\}) = 1$, 则称 $\{x_n\}$ 是 X 上的统计柯西序列。

定义 1.9^[1] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, 若 X 上的任意统计柯西序列都统计收敛, 则称 X 是统计完备的。

引理 1.3^[1] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 统计收敛, 则它是统计柯西序列。

引理 1.4^[1] 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, 若 X 是统计完备的, 则它是完备的。

2 主要结果

在文献[11]中, 我们知道模糊度量空间中统计收敛比统计柯西性质更强。现考虑对该空间附加完备的条件, 则有以下结果。

定理 2.1 设 $(X, M, *)$ 是完备的模糊度量空间, $\{x_n\}$ 为 X 中的序列, 则以下条件等价:

- (1) $\{x_n\}$ 在 X 中统计收敛;
- (2) $\{x_n\}$ 为 X 中的统计柯西序列;
- (3) 存在序列 $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, 使得 $\{y_n\}$ 极限存在, 且 $\delta(\{n \in \mathbb{N} | x_n = y_n\}) = 1$ 。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由引理 1.3 可得。

(2) $\Rightarrow$ (3)

设 $(X, M, *)$ 是完备的模糊度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 上的统计柯西序列, 则对任意 $j \geq 1$ 和 $t > 0$, 存在 $n_{j,t} \in \mathbb{N}$, 使得 $\delta(H_{j,t}) = 1$, 其中 $H_{j,t} = \{n \in \mathbb{N} | M(x_n, x_{n_{j,t}}, t) > 1 - 2^{1-j}\}$, $j = 1, 2$ 。令 $\mathcal{H} = \{H \subset \mathbb{N} | \delta(H) = 1\}$ 且 $H_{(1)} = H_{1,t} \cap H_{2,t}$, 则由引理 1.1 知 $H_{(1)} \in \mathcal{H}$ 。设 $F_1 = \overline{B(x_{n_{1,t}}, 2^0, t)} \cap \overline{B(x_{n_{2,t}}, 2^{-1}, t)}$, 由于对任意 $n \in H_{(1)}$, 有 $x_n \in \overline{B(x_{n_{1,t}}, 2^0, t)}$ 且 $x_n \in \overline{B(x_{n_{2,t}}, 2^{-1}, t)}$, 从而 $x_n \in F_1$ 。

因为 $\{x_n\}$ 是统计柯西序列, 则对任意 $t > 0$, 存在 $n_{3,t} \in \mathbb{N}$, 使得 $\delta(H_{3,t}) = 1$, 其中 $H_{3,t} = \{n \in \mathbb{N} | M(x_n, x_{n_{3,t}}, t) > 1 - 2^{-2}\}$ 。令 $H_{(2)} = H_{(1)} \cap H_{3,t}$, 则由引理 1.1 可知 $H_{(2)} \in \mathcal{H}$ 。设 $F_2 = F_1 \cap \overline{B(x_{n_{3,t}}, 2^{-2}, t)}$, 对任意 $t > 0$, 用 $D_t(F)$ 表示集合 F 关于 t 的模糊直径, 即

$$D_t(F) = \sup \{1 - M(x, y, t) | x, y \in F\}。$$

继续这种构造方法, 可得到闭集序列 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $F_1 \supset F_2 \supset \dots$, 满足

$$D_{2t}(F_n) \leq 1 - (1 - 2^{-n}) * (1 - 2^{-n}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

且 $H_{(n)} \in \mathcal{H}$, 其中 $H_{(n)} = \{l \in \mathbb{N} | x_l \in F_n\}$ 。对任意 $\tilde{x}_n \in F_n$, $p \in \mathbb{N}$ 和 $t > 0$, 有

$$1 - M(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+p}, t) \leq D_{2t}(F_n) \leq 1 - (1 - 2^{-n}) * (1 - 2^{-n}),$$

于是, $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+p}, t) = 1$, 从而可知 $\{\tilde{x}_n\}$ 是 $(X, M, *)$ 的柯西序列。因为 $(X, M, *)$ 是完备的, 所以 $\{\tilde{x}_n\}$ 是收敛的, 即存在 $x \in X$, 使得对任意 $t > 0$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\tilde{x}_n, x, t) = 1$ 。又因对任意 $n \in \mathbb{N}$, F_n 为闭集, 故 $x \in F_n$, 于是有

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, 从而可知 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ 。又因对任意 $t > 0$, 有 $D_{2t}(F_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故由引理 1.2 知 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ 。

现对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$ 取充分大的正整数 m , 使得 $(1 - 2^{-m+1}) * (1 - 2^{-m+1}) > 1 - \varepsilon$ 。因 $H_{(m)} \in \mathcal{H}$, 故对任意 $t > 0$, 存在 $\mathbb{N}$ 递增子列 $\{n_{m,l}\}_{l \in \mathbb{N}}$, 使得对任意 $n > n_{m,l}$, 有

$$\frac{|\{l \in I_n | l \in H_{(m)}^c\}|}{n} < \frac{1}{m}, \text{ 其中 } I_n = \{1, 2, \dots, n\}。$$

令

$$\mathbb{N}' = \{l \in \mathbb{N} | n_m < l < n_{m+1}, l \in H_{(m)}^c\}, y_l = \begin{cases} x, & \text{若 } l \in \mathbb{N}' \text{ 且 } l > n_1; \\ x_l, & \text{其它。} \end{cases}$$

若 $l \in \mathbb{N}'$ 且 $l > n_1$, 则 $y_l = x$, 从而 $1 = M(y_l, x, t) > 1 - \varepsilon$; 若 $l \notin \mathbb{N}'$, 则对充分大的 m , 有 $l \in H_{(m)}$, 从而 $x_l \in F_m$. 于是对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $t > 0$, 有

$$M(x_l, x, 2t) \geq M(x_l, x_{n_m}, t) * M(x_{n_m}, x, t) \geq (1 - 2^{-m+1}) * (1 - 2^{-m+1}) > 1 - \varepsilon,$$

故 $\lim_{l \rightarrow \infty} M(y_l, x, 2t) = \lim_{l \rightarrow \infty} M(x_l, x, 2t) = 1$. 因此可知序列 $\{y_n\}$ 极限存在且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$.

设 $\tilde{H} = \{l \in \mathbb{N} | x_l \neq y_l\}$. 令 $n_m < n < n_{m+1}$, 这里可设 $l \leq n$ 且 $x_l \neq y_l$, 由 y_l 的定义可知 $l \in \mathbb{N}'$, 从而 $l \in H_{(m)}^c$, 于是 $\{l \leq n | x_l \neq y_l\} \subset \{l \leq n | l \in H_{(m)}^c\}$, 所以

$$\frac{|\{l \leq n | x_l \neq y_l\}|}{n} \leq \frac{|\{l \leq n | l \in H_{(m)}^c\}|}{n} < \frac{1}{m}.$$

显然, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $m \rightarrow \infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{l \leq n | l \in H_{(m)}^c\}|}{n} = 0$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{l \leq n | x_l \neq y_l\}|}{n} = 0$. 从而

$$\delta(\{l \leq n | x_l = y_l\}) = 1 - \delta(\{l \leq n | x_l \neq y_l\}) = 1,$$

即得 $\delta(\{n \in \mathbb{N} | x_n = y_n\}) = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (1)

设 $\lim_{l \rightarrow \infty} y_l = x$, 则对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $t > 0$, 存在 $n_{\varepsilon, t} \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $l \geq n_{\varepsilon, t}$, 有 $M(y_l, x, t) > 1 - \varepsilon$. 于是, $|\{l \leq n | M(y_l, x, t) \leq 1 - \varepsilon\}| < n_{\varepsilon, t}$, 故

$$\frac{|\{l \leq n | M(y_l, x, t) \leq 1 - \varepsilon\}|}{n} < \frac{n_{\varepsilon, t}}{n},$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{l \leq n | M(y_l, x, t) \leq 1 - \varepsilon\}|}{n} = 0. \quad (1)$$

由题设可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{l \leq n | x_l \neq y_l\}|}{n} = 0, \quad (2)$$

因为

$$\{l \leq n | M(x_l, x, t) \leq 1 - \varepsilon\} \subset \{l \leq n | x_l \neq y_l\} \cup \{l \leq n | M(y_l, x, t) \leq 1 - \varepsilon\},$$

所以对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $t > 0$, 有

$$\frac{|\{l \leq n | M(x_l, x, t) \leq 1 - \varepsilon\}|}{n} \leq \frac{|\{l \leq n | x_l \neq y_l\}|}{n} + \frac{|\{l \leq n | M(y_l, x, t) \leq 1 - \varepsilon\}|}{n}, \quad (3)$$

于是由式(1)、(2)和(3)可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{l \leq n | M(x_l, x, t) \leq 1 - \varepsilon\}|}{n} = 0,$$

从而 $\delta(\{l \leq n | M(x_l, x, t) > 1 - \varepsilon\}) = 1$, 因此 $\{x_n\}$ 统计收敛于 x .

由上可知, 在完备模糊度量空间中, 统计收敛与统计柯西是等价的. 于是, 可以得到以下结论.

推论 2.1 设 $(X, M, *)$ 是模糊度量空间, 则 X 是统计完备的当且仅当 X 是完备的.

证明 必要性由引理 1.4 可得. 下证充分性. 设 $(X, M, *)$ 是完备模糊度量空间. 设 $\{x_n\}$ 为 X 中的任一统计柯西序列, 则由定理 2.1 可知 $\{x_n\}$ 统计收敛, 故由定义 1.9 知 X 是统计完备的.

参考文献:

- [1] GEORGE A, VEERAMANI P. On some results in fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(3): 395-399.
- [2] GREGORI V, ROMAGUERA S. Some properties of fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 115(3): 485-489.
- [3] GREGORI V, ROMAGUERA S. On completion of fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130(3): 399-404.
- [4] ZYGMUND A. Trigonometric series[M]. 2nd edition. Cambridge, Cambridge University Press, 1959.

- [5] FAST H. Sur la convergence statistique[J]. Colloquium Mathematicum, 1951, 2(3/4): 241–244.
- [6] STEINHAUS H. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique[J]. Colloquium Mathematicae, 1951, 2(1): 73–74.
- [7] FRIDY J A. On statistical convergence[J]. Analysis, 1985, 5(4): 301–313.
- [8] FRIDY J A. Statistical limit points[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1993, 118(4): 1187–1192.
- [9] KOSTYRKO P, MAČAJ M, ŠALÁT T, et al. On statistical limit points[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2001, 129(9): 2647–2654.
- [10] BILALOV B, NAZAROVA T. On statistical convergence in metric spaces[J]. Journal of Mathematics Research, 2015, 1(1): 37–43.
- [11] LI C Q, ZHANG Y L, ZHANG J. On statistical convergence in fuzzy metric spaces[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2020, 39(3): 3987–3993.
- [12] YUN G, CHANG J, HWANG S. Fuzzy isometries and non-existence of fuzzy contractive maps on fuzzy metric spaces[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2011, 13(3): 06–217.
- [13] GEORGE A, VEERAMANI P. On some results of analysis for fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 90(3): 365–368.

(责任编辑:刘 炜)

(上接第 159 页)

- [20] JIN M L, HUANG Q S, ZHAO K, et al. Biological activities and potential health benefit effects of polysaccharides isolated from *Lycium barbarum* L[J]. International Journal of Biological Macromolecules, 2013, 54: 16–23.
- [21] WOJDYŁO A, NOWICKA P, LASKOWSKI P, et al. Evaluation of sour cherry (*Prunus cerasus* L.) fruits for their polyphenol content, antioxidant properties, and nutritional components[J]. Journal of Agricultural and Food Chemistry, 2014, 62(51): 12332–12345.
- [22] 金文刚, 陈小华, 耿敬章, 等. 基于气相-离子迁移谱分析不同产地“汉中仙毫”气味指纹差异[J]. 食品与发酵工业, 2021, 47(5): 231–237.
- [23] 付勋, 聂青玉, 张艳, 等. GC-IMS 分析典型浓香型白酒挥发性成分差异[J]. 中国酿造, 2021, 40(11): 178–183.

(责任编辑:刘 红)