

高中数学教学中的数学文化融入

——以定积分的微元法为例

韩新方^{1,2}, 范雅婷¹, 黄柏梅³, 刘孟铎⁴, 马丽^{1*}

(1. 海南师范大学 数学与统计学院, 海南 海口 571158;

2. 数据科学与智慧教育教育部重点实验室 海南师范大学, 海南 海口 571158;

3. 藤县中学, 广西 梧州 543300;

4. 达州天立学校, 四川 达州 635000)

摘要:导数相关内容被引入高中数学拉近了初等数学与现代数学的距离。为使学生进一步感受极限的思想,提高其数学建模能力和科学的思维能力,培养其思辨和探索精神,针对高中导数应用内容,本文提出在此讲解定积分的微元法。课堂设计从定积分的思想和微元法介绍入手,展示立体几何中圆的面积、球的体积等常见公式的由来,渗透一般到特殊的哲学思想,探索中学数学课堂教学融入数学文化及思政元素的途径。

关键词:定积分;微元法;圆的面积;球的体积;数学文化

中图分类号:G642

文献标志码:A

文章编号:1674-4942(2022)01-0113-06

Integration of Mathematical Culture of Infinitesimal Method in Senior High School—Take the Infinitesimal Method of Definite integrals as Example

HAN Xinfang^{1,2}, Fan Yating¹, HUANG Baimei³, LIU Mengxin⁴, MA Li^{1*}

(1. School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou 571158, China;

2. Key Laboratory of Data Science and Intelligence Education (Hainan Normal University), Ministry of Education, Haikou 571158, China;

3. Tengxian Middle School, Wuzhou 543300, China;

4. Tianli Middle School of Dazhou, Dazhou 635000, China)

Abstract:The contents of derivative in elementary mathematics make students more and more close with modern mathematics. In order to enable students to further feel the idea of limits, improve their modeling ability, and cultivate the spirit of innovation and exploration, and explore the setting of high school mathematics curriculum content, based on the content of derivative application, this article suggests imparting infinitesimal method (the micro element method) in this period, gives the premise of the definite integral and the basic steps of confirming definite integral. This article provides the strict proof to the common formulas, such as the area of a circle and the volume of a sphere in solid geometry, aiming at imparting the philosophical views from general to special, and mathematical culture.

Keywords: definite integrals; infinitesimal method; area of a circle; volume of a sphere; mathematical culture

收稿日期:2021-08-24

基金项目:海南师范大学教学改革项目(hsjg2021-11);海南师范大学课程思政项目

第一作者:韩新方(1981—),河南商丘人,副教授,研究方向为概率论与随机分析、学科教学。E-mail:xfanghan@163.com

*通信作者:马丽(1979—),河南南阳人,副教授,研究方向为狄氏型与随机分析、随机微分方程、学科教学。E-mail:mali-hnsd@163.com

极限理论是现代微积分学的基础,对于高中阶段的学生来说该内容过于丰富且难以理解。在高中阶段讲解定积分的概念时,不可避免要用到极限理论或思想,使得定积分的概念变得晦涩难懂,导致定积分应用等变成无源之水的套路或模式化,使学生产生不严谨的困惑和陷入不知对错的窘境。为避免“以未知讲新知”的不伦循环及数学学习中的不严谨,本文提出在高中阶段讲解定积分时强化微元法教学,在学生简单了解定积分定义后,用微元法来代替定积分严格定义,给出适用定积分计算的3个前提条件以及应用的3个基本步骤。本文从定积分的思想和微元法入手,给出若干经典几何问题建模的前提和具体步骤,近似严格地证明立体几何中圆的面积、球的体积等常见的公式,旨在培养学生具备一般到特殊的哲学观点,提高其抽象到具体的数学思维能力和严谨的数学逻辑推理能力,在数学课堂教学中渗透数学文化。

基于《普通高中数学课程标准(2017年版)》,现代数学中有关微积分的基本知识^[1-6]引入到了初等数学中,尤其是关于函数导数、定积分及其应用方面的内容,并日益被一些中学教师和学者所关注并研究。在高中阶段讲解定积分的概念时,通常通过求曲边梯形面积和变速直线运动路程的过程得到“分割、近似、求和、取极限”4个步骤,然后将其归结为一个特定形式和(黎曼和)的极限,进而得到定积分。这样处理比较严谨,符合现代数学的公理化体系,但太精细反而显得繁琐,而且学生并没有学习极限理论的相关知识,如此用未知的极限知识来讲解定积分会使得学生在学习定积分的时候存在不少的困难。因此,基于作者的教学实践和之前的讲究积累^[7-8],本文提出在高中阶段淡化定积分的定义,达到知道“是什么”的程度即可。“怎么做”这一环节引入微元法,强调微元法中“以直代曲,以常代变”的思想,讲授适用定积分模型的前提条件以及写出定积分的基本步骤。这样既可以避免未知内容的循环论证,又可以明晰定积分应用的具体操作步骤或流程,保证数学知识的逻辑性和相对严谨性,同时也减少学生的学习困惑,提高了学生解决问题的建模能力。

利用定积分证明高中阶段(立体)几何中的基本公式是定积分的一个重要应用。对于这部分内容,本文阐述并利用微元法,期望使学生体会定积分中分割、近似求和的思想。基于此,本文选取了几组特殊的平面和立体图形进行微元法求面积或体积,分析各公式之间的联系,并探究平面及立体几何中3个常见基本量(平面几何图形周长、面积及立体几何图形的体积)。最后指出针对学有余力的学生可以探讨微元法求平面曲线的曲线长,增加该部分内容的创造性、高阶性和挑战度。

1 微元法

从某种意义上来说,微元法是由定积分定义中“精简”出来的一种方法。它在一定程度上避开了定义中“取极限”的步骤和积分可积的必要条件(十分基础且必要,但对大部分中学师生来说确实难懂),避免循环论证发生,但是它并没有解释为什么可以将和式转化为定积分,因此微元法是具有相对的严谨性。但鉴于中学生的年龄和思维特征,使得学生学习这部分内容应更加注重应用,因此在学生简单了解定积分的定义并掌握了“精简”的微元法后,应该让学生明确微元法的适用条件以及具体的操作流程。

1.1 微元法的适用条件

定积分的应用中,如果某一实际问题中的所求量 U 符合下列条件^[9-10],

- (i) U 是与某个变量(比如 x)的变化区间 $[a, b]$ 有关的量;
- (ii) U 在变化区间 $[a, b]$ 上具有可加性,即如果把区间 $[a, b]$ 分成许多小区间,则 U 相应地分成许多部分量,而 U 等于所有部分量之和;
- (iii) 根据以直代曲的思想,部分量 ΔU_i 的近似值可以表示为 $f(\xi_i)\Delta X_i$,
那么就可以用定积分来表达 U 。

1.2 微元法的具体操作步骤

写出 U 的积分表达式的步骤如下:

- (i) 根据具体问题,选定一个合适的积分变量(比如 x),并确定它的变化区间为 $[a, b]$;
- (ii) 把区间 $[a, b]$ 分割成无数个小区间,取其中任一小区间并记作 $[x, x + dx]$,求出这个小区间的部分量 ΔU 相应的近似值。若 ΔU 能近似地表示成 $[a, b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积,且 ΔU 与

$f(x)dx$ 近似相等,就称 $f(x)dx$ 为变量 U 的微元且记作 dU ,即 $dU = f(x)dx$;

(iii)以所求量 U 的微元 $f(x)dx$ 作为被积表达式,在区间 $[a, b]$ 上作积分,得所求量 U 的积分表达式 $\int_a^b f(x)dx$ 。

上述方法通常称为微元法,是一种重要的数学方法,同时也是定积分“以直代曲”思想的具体体现,因此寻求实际问题中的“微元”是利用积分解决实际问题的关键一步。

2 举例演示、化抽象为具体

在系统地讲解微元法之后,结合以下具体例子向学生演示微元法的具体操作步骤。这里选取椭圆和圆的面积和椭球的体积公式以及它们的特殊形式举例说明,目的是使学生进一步认识应用微元法的操作规范,并加深对一些特殊图形的面积以及体积公式的理解。

2.1 圆面积公式

椭圆在 xOy 平面上的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,如图1所示,利用椭圆的对称性,可以将整个椭圆的面积 $S_{\text{椭}}$ 转化为 x 轴上方的面积的2倍。

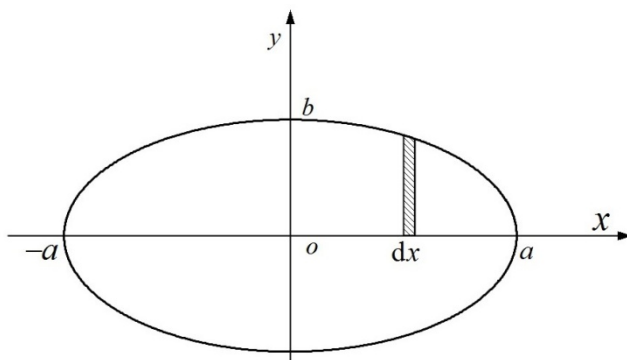


图1 微元法求椭圆的面积

Figure 1 The area of an ellipse by infinitesimal method

(1)判断是否符合微元法的应用条件:

(i)所求量 $S_{\text{椭}}$ 是与变量 x 的变化区间 $[-a, a]$ 有关的量;

(ii) $S_{\text{椭}}$ 在变化区间 $[-a, a]$ 具有可加性,也就是说把区间 $[-a, a]$ 进行分割得到多个小区间,相应的 $S_{\text{椭}}$ 被分成多个部分量,则有 $S_{\text{椭}}$ 等于所有部分量之和;

(iii)取 $S_{\text{椭}}$ 其中任一小区间 $[x, x + dx]$,则对应部分量 $\Delta S_{\text{椭}}$ 的近似值为 ydx 。

因此,可以运用微元法求椭圆面积。

(2)利用微元法计算椭圆面积

选取 x 作为积分量,则 x 的变化区间为 $[-a, a]$ 。对区间 $[-a, a]$ 进行分割,在任一小区间 $[x, x + dx]$ 上,利用以直代曲的思想将小曲边梯形近似为矩形,则 $\Delta S_{\text{椭}}$ 的近似值为 ydx ,其中 $y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$,有 $S_{\text{椭}} =$

$$2 \int_{-a}^a y dx = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx。$$

鉴于被积函数的复杂性,高中阶段最简洁的解决方法是利用三角换元法求解:

令 $\frac{x}{a} = \cos \alpha, \alpha \in [0, \pi]$,代入且由牛顿-莱布尼兹公式得:

$$S_{\text{椭}} = -2ab \int_{\pi}^0 \sin \alpha \sin \alpha d\alpha = ab \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha = ab \left(\alpha \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \Big|_0^{\pi} \right) = \pi ab,$$

即得椭圆的面积为 $S_{\text{椭}} = \pi ab$ 。

(3)一般到特殊的思想

已知圆是最特殊的椭圆,当 $a = b = r$ 时椭圆的面积公式转化为圆的面积公式 πr^2 。

2.2 圆柱体积和圆锥体积公式

如图2所示,圆柱的体积 $V_{\text{柱}}$ 是与圆柱的高 H 的变化区间有关的量,同时 $V_{\text{柱}}$ 在该变化区间具有可加性,即把该区间分割成无数个小区间,得到 $V_{\text{柱}}$ 的部分量 $\Delta V_{\text{柱}}$ (相当于把圆柱分割成无数个小圆片),则圆柱的体积等于这些部分量的总和。其中 $\Delta V_{\text{柱}}$ 的近似值可以表示成 $\pi r^2 dh$ (其中 dh 为分割后任意小区间的长度)。则所求量 $V_{\text{柱}}$ 满足微元法的应用条件,下面应用微元法计算圆柱的体积。

沿圆柱的高视作积分变量,则它的变化区间为 $[0, H]$; 任取一小区间记作 $[h, h + dh]$, 在每个小区间上圆柱体积的部分量 $\Delta V_{\text{柱}}$ 的近似值为 $\pi r^2 dh$, 由微元法得 $V_{\text{柱}} = \int_0^H \pi r^2 dh$ 。根据牛顿-莱布尼兹公式有圆柱的体积 $V_{\text{柱}} = \pi r^2 H$ 。

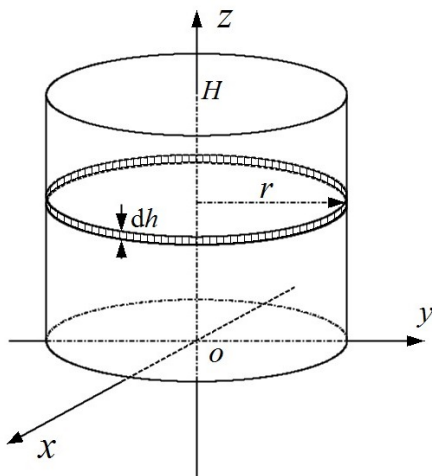


图2 微元法求圆柱体的体积

Figure 2 The volume of a cylinder by infinitesimal method

在高中阶段,通过实验知道圆柱的体积是等底等高圆锥体积的三倍,但是这个结论是通过实验得出的,缺乏严谨的论证。在得出圆柱体的体积公式后,仿照圆柱体积的求法引导学生思考如何利用微元法来计算出圆锥体积。

如下图3所示,用平行于圆锥底面的平面对其进行分割,圆锥的体积 $V_{\text{锥}}$ 是与圆锥的高 H 的变化区间 $[0, H]$ 有关的量,同时 $V_{\text{锥}}$ 在该变化区间具有可加性,即把该区间分割成无数个小区间,得到若干个小圆台,得到 $V_{\text{锥}}$ 的部分量 $\Delta V_{\text{台}}$,可知圆锥体积等于这些小圆台 $\Delta V_{\text{台}}$ 的体积和,为了简化计算将小圆台近似看成小圆柱饼。则所求量 $V_{\text{锥}}$ 满足微元法的应用条件。设圆锥的高为 H , 地面半径 R , 由三角形相似得到每个圆柱的底面半径 r 与它距离圆锥底面高度 h 的关系为 $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$, 则由牛顿-莱布尼茨公式得圆锥的体积为

$$\begin{aligned} V_{\text{锥}} &= \int_0^H \pi r^2 dh = \int_0^H \pi \left(\frac{H-h}{H} R \right)^2 dh \\ &= \pi R^2 \int_0^H \left(1 + \frac{h^2}{H^2} - \frac{2h}{H} \right) dh = \pi R^2 \left(H - H + \frac{1}{3} H \right) = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \end{aligned}$$

因此,圆锥的体积为 $V_{\text{锥}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ 。

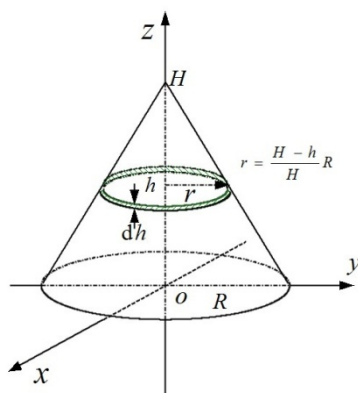


图3 微元法求圆锥体的体积

Figure 3 The volume of a cone by infinitesimal method

至此,得到圆锥体积严谨的证明。从中可以发现同规格圆柱与圆锥的体积比是3:1。

2.3 球体体积公式

如图4所示,椭球体的体积 $V_{\text{椭}}$ 是与 x 的变化区间有关的量且在变化区间上具有可加性,即把该区间分割成无数个小区间,得到 $V_{\text{椭}}$ 的部分量 $\Delta V_{\text{椭}}$ (相当于把椭球体用垂直于 x 轴的平面分割成无数个小椭圆片),椭球体的体积等于这些部分量的总和,则所求量 $V_{\text{椭}}$ 符合运用微元法的条件。

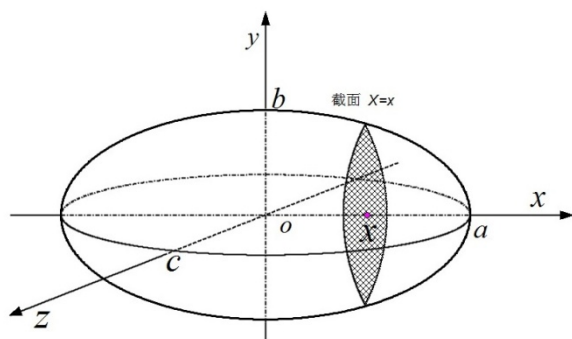


图4 微元法求圆锥体的体积

Figure 4 The volume of a ellipsoid by infinitesimal method

下面应用微元法计算椭球体的体积。

将 x 看作是积分变量,它的变化区间为 $[-a, a]$,任取一小区间记作 $[x, x + dx]$,在每个小区间上椭球体体积的部分量 $\Delta V_{\text{椭}}$ 的近似值为 $S_{\text{椭}}dx$ 。其中,所截得椭圆的表达式如下:

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 1。$$

由2.1节证得的椭圆面积公式得 $S_{\text{椭}} = \pi \left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$,故再由微元法得

$$\begin{aligned} V_{\text{椭}} &= \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \int_{-a}^a \pi bcdx - \int_{-a}^a \frac{\pi}{a^2} bcx^2 dx \\ &= \pi bcx \Big|_{-a}^a - \frac{\pi bc}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^a = 2\pi abc - \frac{2\pi}{3} abc = \frac{4\pi}{3} abc。 \end{aligned}$$

因此,椭球的体积为

$$V_{\text{椭}} = \frac{4\pi}{3} abc。$$

已知球体是特殊的椭球体,当 $a = b = c = R$ 时,得到球的体积公式 $V_{\text{球}} = \frac{4\pi}{3} R^3$ 。

此外,在证明一般图形的面积及体积公式后,还可以借助微元法向学生介绍如何计算平面曲线的长度,在“不可度量”到“可计算”的过程中感受微积分中“以直代曲”的思想并领略数学知识的魅力。这一部分内容对于提升学生数学思维的逻辑性和严谨性有重要作用,但对学生的基础要求较高,建议教师适当引导,体现数学知识的延展性及课堂的高阶性、创造性和挑战度。

3 教学建议与总结

本文意在通过讲解微元法来推广定积分的应用在高中阶段的普及,使得更多中学生感受到数学严谨性并提高其学以致用思维能力和建模能力。由于学生的年龄特征和思维水平的局限,中学生仅适用于“相对严谨”的证明并注重应用。文中展示了3组几何公式的证明,让学生明确微元法的适用条件以及具体的操作流程,让学生从实际运用的层面体会其依据。通过分析几组公式的关系,也让学生体会到由一般到特殊的哲学思想,感受数学区别于其他学科的逻辑性和严谨性,使高中数学课堂融入整体到部分、特殊到一般、追求严谨和真理的思政元素,富有数学文化张力。

参考文献:

- [1] 张健. 旋转体体积计算中的微元法思想应用[J]. 大学数学, 2017, 33(4): 104-110.
- [2] 赵娜. 多媒体环境下定积分元素法的教法初探[J]. 数学学习与研究, 2017(7): 21-23.
- [3] 谷佳. 微积分的思想及方法在中学数学中的应用[J]. 数学学习与研究, 2016(19): 101.
- [4] 徐月. 定积分元素法的应用[J]. 高师理科学刊, 2015, 35(7): 29.
- [5] 燕秀林. 关于定积分微元法的几点思考[J]. 教育教学论坛, 2015(21): 166-167.
- [6] 谢歆, 项明寅. 一道用元素法求立体体积习题的探讨[J]. 大学数学, 2012, 28(2): 148-151.
- [7] 韩新方, 马丽. 函数可积性教学的改进策略[J]. 海南师范大学学报(自然科学版), 2017, 30(1): 105-107.
- [8] 韩新方, 李妍. 基于核心素养的数学课堂教学实践——以“定积分的应用”为例[J]. 数学教学通讯, 2020(15): 29-31.
- [9] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 第6版. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [10] 华东师大数学系. 数学分析[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

责任编辑: 刘 红