

非 k 积量子态基于Fisher信息的不对称性关联度

周芳宇, 王银珠*

(太原科技大学 应用科学学院, 山西 太原 030024)

摘要:在量子信息理论中,量子Fisher信息(QFI)对于提高量子计量精度和效率极其重要。本文给出了多体非 k 积量子态基于Fisher信息的不对称性关联度,同时证明了其满足量子关联度的一些必要物理性质,包括非负性、酉不变性和凸性。

关键词:多体量子系统; k 积态;量子Fisher信息;量子关联度

中图分类号:O413.1

文献标志码:A

文章编号:1674-4942(2022)01-0010-06

Correlation Measure of Non- k -product Quantum States Asymmetry Based on Fisher Information

ZHOU Fangyu, WANG Yinzhū*

(School of Applied Sciences, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract:Quantum Fisher information (QFI) is very important in quantum information theory for improving the precision and efficiency of quantum metrology. A correlation measure for multipartite non- k -product quantum states asymmetry based on Fisher information are given, and some necessary properties of satisfying quantum correlation measure are proved, including nonnegativity, unitary invariance and convexity.

Keywords: multipartite quantum system; k -product states; quantum Fisher information; correlation measure

1 引言

量子关联作为一种重要的物理资源在量子信息理论中发挥着越来越重要的作用^[1-3]。量子纠缠是最早被发现的一种极其重要的关联,关于纠缠态的识别方面已有很多重要的结果,如Peres-Horodecki判据^[3-4]、约化判据^[3,5]、控制判据^[3,6]、重排判据^[3,7]、纠缠Witnesses判据^[3,8]、局域不确定关系判据^[9-11]等多种方法。除纠缠外,研究者发现在可分态中也存在一种量子关联,比较重要的量子关联主要有量子失协^[12-13]、量子导引^[14]、测量诱导的非局域性^[13]等。如何为多体量子态定义合适的可计算的关联测度是一个有价值的研究问题。众所周知,多体量子态的可分性问题非常复杂,涉及许多可分性概念,包括完全可分、部分可分、 k 可分^[15]、强 k 可分^[16]和 Λ 可分^[17]等。目前国内外关于多体量子态相对于 k 体分划的关联测度问题的研究结果相对较少,因此,进一步深入研究多体复合系统量子态相对于 k 体分划的关联测度具有重要的理论和实际意义。近年来,人们提出了许多不同背景下的量子资源,如纠缠、量子关联^[11,18-19]、量子相干^[20]和不对称性^[21]。

在量子信息理论中,每一个物理系统都与一个可分复Hilbert空间对应。量子态是迹为1的半正定算子,

收稿日期:2021-11-22

基金项目:山西省自然科学基金项目(201901D111254)

第一作者:周芳宇(1997—),河北沧州人,硕士研究生,主要研究方向为量子信息与量子计算。E-mail:zhoufangyu97@163.com

*通信作者:王银珠(1977—),山西朔州人,副教授,主要研究方向为量子信息与量子计算。E-mail:2006wang.yinzhū@163.com

$S(H)$ 表示 H 上所有量子态组成的集合。设 $\rho \in S(H)$,若 $\text{Tr}(\rho^2) = 1$,则称 ρ 是纯态;若 $\text{Tr}(\rho^2) < 1$,则称 ρ 是混合态。

1969年,Helstrom在文献[22]中最早提出了量子Fisher信息的概念,其定义如下:

$$\mathcal{F}(\rho, K) = \frac{1}{4} \text{Tr} \rho L_K^2, \quad (1)$$

其中, L_K 满足 $i[\rho, K] = \frac{1}{2}(L_K \rho + \rho L_K)$, K 为可观测量算子, $[\cdot, \cdot]$ 表示交换子。设 $\rho \in S(H)$,且 $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ 为其谱分解,其中 $p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$,则 $\mathcal{F}(\rho, K)$ 的计算公式为

$$\mathcal{F}(\rho, K) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} |\langle \psi_i | K | \psi_j \rangle|^2, \quad (2)$$

其中 ρ 是一个量子态, K 为 H 上的任意物理可观测量。接下来我们引入Fisher信息的一些良好性质^[23-26]:

(1) $\mathcal{F}(\rho, K) \geq 0$;

(2) 对于纯态, $\mathcal{F}(\rho, K) = V(\rho, K)$,其中 $V(\rho, K) = \text{Tr} \rho K^2 - (\text{Tr} \rho K)^2$;如果 ρ 是混合态,则 $0 \leq \mathcal{F}(\rho, K) \leq V(\rho, K)$;

(3) 对任意的与可观测量算子 K 可交换的西算子 U (即 $UK = KU$),有 $\mathcal{F}(\rho, K) = \mathcal{F}(U\rho U^\dagger, K)$;

(4) $\mathcal{F}(\rho, K)$ 相对于输入态 ρ 是凸的,即 $\mathcal{F}(\sum_i \lambda_i \rho_i, K) \leq \sum_i \lambda_i \mathcal{F}(\rho_i, K)$,其中 ρ_i 为任意量子态,常数 λ_i 满足 $\sum_i \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1$ 。

为了量化两体复合系统中量子态的量子关联,在文献[26]中,作者引进了两体量子态的不对称性概念,其可以作为一种量子资源应用于量子计算的许多方面。对于任意两体复合量子系统 $H = H_A \otimes H_B$, $\rho \in S(H)$, $\dim H_A = d_A, \dim H_B = d_B$, $U(H_A)$ 和 $U(H_B)$ 分别为量子系统 H_A 和 H_B 上的酉群。设 $\{X_m; m = 1, 2, \dots, d_A^2\}$ 和 $\{Y_n; n = 1, 2, \dots, d_B^2\}$ 分别是 $U(H_A)$ 和 $U(H_B)$ 上的Lie代数 L^A 和 L^B 的正交基,相应复合系统 H 上的正交基可定义如下:

$$\{X_m \otimes I_B, I_A \otimes Y_n; m = 1, 2, \dots, d_A^2; n = 1, 2, \dots, d_B^2\}.$$

在文献[26]中,作者给出了两体量子态基于Fisher信息的不对称性,其定义如下:

$$A(\rho^{AB}, L^{AB}) = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{d_A^2} F(\rho^{AB}, X_m \otimes I_B) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{d_B^2} F(\rho^{AB}, I_A \otimes Y_n), \quad (3)$$

其中 $L^{AB} = L^A \oplus L^B$, L^A 和 L^B 为对应的Lie代数。根据文献[26], $A(\rho^{AB}, L^{AB})$ 具有如下性质:

(1) $A(\rho^{AB}, L^{AB}) \geq 0$,当且仅当 ρ_{AB} 为极大混合态时,等号成立;

(2) $A(\rho^{AB}, L^{AB})$ 是酉不变的,即 $A(\rho^{AB}, L^{AB}) = A((U \otimes V)\rho^{AB}(U \otimes V)^\dagger, L^{AB})$;

(3) $A(\rho^{AB}, L^{AB})$ 是凸的,即 $A(\sum_i \lambda_i \rho_i^{AB}, L^{AB}) \leq \sum_i \lambda_i A(\rho_i^{AB}, L^{AB})$;

(4) $A(\rho^{AB}, L^{AB})$ 是超可加的,即 $A(\rho^{AB}, L^{AB}) \geq A(\rho^A, L^A) + A(\rho^B, L^B)$,当且仅当 ρ^{AB} 为乘积态时等号成立,其中 $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$ 和 $\rho_B = \text{Tr}_A \rho$ 分别是第一个系统和第二个系统上的约化态;

(5) $A(\rho^{AB}, L^{AB})$ 在完全正的保迹映射下不增加。

作者进一步将两体系统量子态的不对称性推广到了多体情形,并提出了两体以及多体系统量子态基于Fisher信息的不对称性的一种关联测度,其中两体量子态基于Fisher信息的不对称性关联度定义如下^[26]:

$$Q(\rho^{AB}) = A(\rho^{AB}, L^{AB}) - A(\rho^A \otimes \rho^B, L^{AB}).$$

在此基础上,本研究主要考虑多体复合量子系统相对于 k 体划分的非 k 积量子态基于Fisher信息的不对称性关联度。

2 主要结果

为了得出本文的结果,首先给出一些基本定义。

定义 1^[27] 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, 其中 H_j 是第 j 个子系统对应的可分复 Hilbert 空间, 称 $A_1|A_2|\cdots|A_k$ 为 H 的一个 k 体划分, 如果其满足以下条件:

(1) 对 $\forall i \neq j (i, j \in \{1, 2, \cdots, k\})$, 有 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \{1, 2, \cdots, m\}$;

(2) $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m = H^{A_1} \otimes H^{A_2} \otimes \cdots \otimes H^{A_k}$, 其中 $H^{A_i} = \bigotimes_{j=1}^{k_i} H_{n_{ij}}$, 这里 $A_i = \{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{ik_i}\}$, $n_{i1} < n_{i2} < \cdots < n_{ik_i}$.

定义 2^[27] 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, $|\varphi\rangle \in H$, 如果存在一个 k 体划分 $A_1|A_2|\cdots|A_k$, 使得 $|\varphi\rangle$ 可以表示为

$$|\varphi\rangle = |\varphi_1^{A_1}\rangle \otimes |\varphi_2^{A_2}\rangle \otimes \cdots \otimes |\varphi_k^{A_k}\rangle,$$

其中 $|\varphi_i^{A_i}\rangle \in H^{A_i} (i = 1, 2, \cdots, k)$, 则称 $|\varphi\rangle$ 为 k 可分的。对于混合态 $\rho \in S(H)$, 如果 ρ 可以表示为

$$\rho = \sum_s p_s |\varphi_s\rangle\langle\varphi_s|,$$

其中 $|\varphi_s\rangle \in H$ 对每一个 s 都是 k 可分的, $\{p_s\}$ 是一个概率分布, 则称 ρ 为 k 可分的。

定义 3 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, $\rho \in S(H)$, 对于固定 $k \in \{2, 3, \cdots, m\}$, 如果存在一个 k 体划分 $A_1|A_2|\cdots|A_k$ 使得

$$\rho = \rho^{A_1} \otimes \rho^{A_2} \otimes \cdots \otimes \rho^{A_k},$$

其中 $\rho^{A_i} = \text{Tr}_{H^{A_i}} \rho$, $\overline{H^{A_i}}$ 表示 H^{A_i} 空间在 H 上的补集, 则称 ρ 为 k 积态, 简记为 $\rho \in S_{k-P}(H)$, 这里 $S_{k-P}(H)$ 表示 H 上的全体 k 积态。

定义 4 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, $\rho \in S(H)$, $L^{A_1 A_2 \cdots A_k} = L^{A_1} \oplus L^{A_2} \oplus \cdots \oplus L^{A_k}$, 记

$$Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho) = \min_{\mathbb{A}} [\mathcal{A}(\rho, L^{A_1 A_2 \cdots A_k}) - \sum_{i=1}^k \mathcal{A}(\rho^{A_i}, L^{A_i})], \quad (4)$$

其中最小值取遍所有 k 体划分 $\mathbb{A} = A_1|A_2|\cdots|A_k$, 称 $Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho)$ 为量子态 ρ 基于 Fisher 信息的不对称性关联度。

为了研究 $Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho)$ 的性质, 首先讨论多体情形下 Fisher 信息的不对称性的性质。

本文考虑 m 体复合量子系统, 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, 其中 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 分别是与量子系统 $1, 2, \cdots, m$ 相对应的可分复 Hilbert 空间。记 $S(H)$ 表示 H 上全体量子态组成的集合, $L(H)_h$ 表示 H 上全体可观测量算子组成的集合, 令

$$\Delta_{A_i}^{(k)} = I^{A_1} \otimes I^{A_2} \otimes \cdots \otimes I^{A_{i-1}} \otimes K^{A_i} \otimes I^{A_{i+1}} \otimes \cdots \otimes I^{A_k} (i = 1, 2, \cdots, k), \quad (5)$$

其中 K^{A_i} 为空间 H^{A_i} 上的可观测量算子, $I^{A_1}, I^{A_2}, \cdots, I^{A_k}$ 分别为 $H^{A_1}, H^{A_2}, \cdots, H^{A_k}$ 上的恒等算子。

定理 1 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, $\rho \in S(H)$, $A_1|A_2|\cdots|A_k$ 为 H 的某一固定 k 体划分, 则

$$\mathcal{F}(\rho, \sum_{i=1}^k \Delta_{A_i}^{(k)}) \leq \sum_{i=1}^k \mathcal{F}(\rho^{A_i}, K^{A_i}),$$

其中 $\Delta_{A_i}^{(k)}$ 如式(5)定义, $\rho^{A_i} = \text{Tr}_{H^{A_i}} \rho$, 当 ρ 为 k 积态时等号成立。

为了证明定理 1, 需要下面一个引理:

引理 1^[26] 设 $H = H_A \otimes H_B$, $\rho \in S(H)$, 有

$$\mathcal{F}(\rho_{AB}, K_A \otimes I_B + I_A \otimes K_B) \leq \mathcal{F}(\rho_A, K_A) + \mathcal{F}(\rho_B, K_B),$$

其中 $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$, $\rho_B = \text{Tr}_A \rho$, K_A 和 K_B 分别为空间 $L(H_A)_h$ 和 $L(H_B)_h$ 上的可观测量, I_A 和 I_B 分别为 H_A 和 H_B 上的恒等算子, 当 ρ_{AB} 为乘积态等号成立。

定理 1 的证明 利用归纳法, 由引理 1, 当 $k = 2$ 时成立。

假设结论对 $H^{A_1} \otimes H^{A_2} \otimes \cdots \otimes H^{A_{k-1}}$ 系统成立, 即

$$\mathcal{F}(\rho, \sum_{i=1}^{k-1} \Delta_{A_i}^{(k)}) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}(\rho^{A_i}, K^{A_i}).$$

下面证明结论对 $H^{A_1} \otimes H^{A_2} \otimes \cdots \otimes H^{A_k}$ 系统成立。由引理1可得

$$\mathcal{F}(\rho, \sum_{i=1}^k \Delta_{A_i}^{(k)}) = \mathcal{F}(\rho, \sum_{i=1}^{k-1} \Delta_{A_i}^{(k)} + \Delta_{A_k}^{(k)}) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}(\rho^{A_i}, K^{A_i}) + \mathcal{F}(\rho^{A_k}, K^{A_k}),$$

再由归纳假设可知

$$\mathcal{F}(\rho, \sum_{i=1}^k \Delta_{A_i}^{(k)}) \leq \sum_{i=1}^k \mathcal{F}(\rho^{A_i}, K^{A_i}).$$

当 ρ 为 k 积态时,则存在一个 k 体划分 $A_1|A_2|\cdots|A_k$,使得 $\rho = \rho^{A_1} \otimes \rho^{A_2} \otimes \cdots \otimes \rho^{A_k}$,因此

$$\mathcal{F}(\rho, \sum_{i=1}^k \Delta_{A_i}^{(k)}) = \sum_{i=1}^k \mathcal{F}(\rho^{A_i}, K^{A_i}).$$

定理2 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, $\rho \in S(H)$, $A_1|A_2|\cdots|A_k$ 为 H 的某一固定 k 体划分,则

$$A(\rho, L^{A_1 A_2 \cdots A_k}) \geq \sum_{i=1}^k A(\rho^{A_i}, L^{A_i}),$$

其中 $L^{A_1 A_2 \cdots A_k} = L^{A_1} \oplus L^{A_2} \oplus \cdots \oplus L^{A_k}$ 为相对应的Lie代数, $\rho^{A_i} = \text{Tr}_{H^{A_i}} \rho$, 当 ρ 为 k 积态时等号成立。

为了证明定理2,需要下面一个引理。

引理2^[26] 设 $H = H_A \otimes H_B$, $\rho \in S(H)$, 有

$$A(\rho_{AB}, L^{AB}) \geq A(\rho_A, L^A) + A(\rho_B, L^B),$$

其中 $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$, $\rho_B = \text{Tr}_A \rho$, L^A 和 L^B 为相对应的Lie代数, $L^{AB} = L^A \oplus L^B$, 当 ρ 为乘积态时等号成立。

定理2的证明 利用归纳法,由引理2,当 $k=2$ 时成立。

假设结论对 $H^{A_1} \otimes H^{A_2} \otimes \cdots \otimes H^{A_{k-1}}$ 系统成立,即

$$A(\rho, L^{A_1 A_2 \cdots A_{k-1}}) \geq \sum_{i=1}^{k-1} A(\rho^{A_i}, L^{A_i}).$$

下面证明结论对 $H^{A_1} \otimes H^{A_2} \otimes \cdots \otimes H^{A_k}$ 系统成立。由于

$$A(\rho, L^{A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k}) = A(\rho, L^{A_1 A_2 \cdots A_{k-1}}) + A(\rho, L^{A_k}),$$

由引理2可得

$$A(\rho, L^{A_1 A_2 \cdots A_{k-1} A_k}) \geq \sum_{i=1}^{k-1} A(\rho^{A_i}, L^{A_i}) + A(\rho^{A_k}, L^{A_k}),$$

再由归纳假设可知

$$A(\rho, L^{A_1 A_2 \cdots A_k}) \geq \sum_{i=1}^k A(\rho^{A_i}, L^{A_i}).$$

当 ρ 为 k 积态时,则存在一个 k 体划分 $A_1|A_2|\cdots|A_k$,使得 $\rho = \rho^{A_1} \otimes \rho^{A_2} \otimes \cdots \otimes \rho^{A_k}$,因此 $A(\rho, L^{A_1 A_2 \cdots A_k}) = \sum_{i=1}^k A(\rho^{A_i}, L^{A_i})$ 。

接下来证明 $Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho)$ 满足量子关联度的一些必要的物理性质。

定理3 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, $\rho \in S(H)$, 则 $Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho) \geq 0$, 且如果 ρ 是 k 积态, 那么 $Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho) = 0$ 。

证明 由定理2可知 $Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho) \geq 0$ 是显然的。另外, 当 ρ 是 k 积态时, 则存在一个 k 体划分 $A_1|A_2|\cdots|A_k$, 使得 $\rho = \rho^{A_1} \otimes \rho^{A_2} \otimes \cdots \otimes \rho^{A_k}$, 易知 $Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho) = 0$ 。

定理4 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, $\rho \in S(H)$, $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 分别为 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 上的酉算子, 则

$$Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho) = Q_{\mathcal{A}}^{(k)}[(U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_m)\rho(U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_m)^\dagger].$$

证明 由于Fisher信息在酉操作下保持不变, 从而

$$A(\rho, L) = A((U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_m)\rho(U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_m)^\dagger, L),$$

因此

$$Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho) = Q_{\mathcal{A}}^{(k)}[(U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_m)\rho(U_1 \otimes U_2 \otimes \cdots \otimes U_m)^\dagger].$$

定理 5 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_j = d_j < +\infty$, $\rho \in S(H)$, 则 $Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho)$ 关于输入态是凸的, 即当 $\rho_1, \rho_2 \in S(H)$ 时, 有

$$Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(t\rho_1 + (1-t)\rho_2) \leq tQ_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho_1) + (1-t)Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho_2), \text{ 其中 } t \in [0, 1].$$

证明 对任意的量子态 $\rho_1, \rho_2 \in S(H)$, 有

$$\begin{aligned} & Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(t\rho_1 + (1-t)\rho_2) \\ &= \min_{\mathbf{A}} [\mathcal{A}(t\rho_1 + (1-t)\rho_2, L) - \sum_{i=1}^k \mathcal{A}(\rho^{A_i}, L^{A_i})] \\ &\leq t \min_{\mathbf{A}} [\mathcal{A}(\rho_1, L) - \sum_{i=1}^k \mathcal{A}(\rho^{A_i}, L^{A_i})] + (1-t) \min_{\mathbf{A}} [\mathcal{A}(\rho_2, L) - \sum_{i=1}^k \mathcal{A}(\rho^{A_i}, L^{A_i})] \\ &= tQ_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho_1) + (1-t)Q_{\mathcal{A}}^{(k)}(\rho_2). \end{aligned}$$

3 结论

本文定义了一个新的关联测度——非 k 积量子态基于 Fisher 信息的不对称性关联度, 同时证明了其满足量子关联度的一些必要物理性质, 包括非负性、酉不变性和凸性。

参考文献:

- [1] BENNETT C H, DIVINCENZO D P, SMOLIN J A, et al. Mixed-state entanglement and quantum error correction[J]. Physical Review A, 1996, 54(5): 3824–3851.
- [2] VEDRAL V. The role of relative entropy in quantum information theory[J]. Reviews of Modern Physics, 2002, 74(1): 197–234.
- [3] HORODECKI R, HORODECKI P, HORODECKI M, et al. Quantum entanglement[J]. Reviews of Modern Physics, 2009, 81(2): 865–942.
- [4] HORODECKI M, HORODECKI P, HORODECKI R. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions[J]. Physics Letters A, 1996, 223(1/2): 1–8.
- [5] CERF N J, ADAMI C. Quantum extension of conditional probability[J]. Physical Review A, 1999, 60(2): 893–897.
- [6] NIELSEN M A, KEMPE J. Separable states are more disordered globally than locally[J]. Physical Review Letters, 2001, 86(22): 5184–5187.
- [7] CHEN K, WU L A. A matrix realignment method for recognizing entanglement[J]. Quantum Information and Computation, 2003, 3(3): 193–202.
- [8] LEWENSTEIN M, KRAUS B, CIRAC J I, et al. Optimization of entanglement witnesses[J]. Physical Review A, 2000, 62(5): 052310.
- [9] HOFMANN H F, TAKEUCHI S. Violation of local uncertainty relations as a signature of entanglement[J]. Physical Review A, 2003, 68(3): 032103.
- [10] GÜHNE O, MECHLER M, TOTH G, et al. Entanglement criteria based on local uncertainty relations are strictly stronger than the computable cross norm criterion[DB/OL]. (2006–07–15)[2021–11–22]. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0604050>.
- [11] GIROLAMI D, TUFARELLI T, ADESSO G. Characterizing nonclassical correlations via local quantum uncertainty[J]. Physical Review Letters, 2013, 110(24): 240402.
- [12] LUO S L. Quantum discord for two-qubit systems[J]. Physical Review A, 2008, 77(4): 042303.
- [13] LUO S L, FU S S. Measurement-induced nonlocality[J]. Physical Review Letters, 2011, 106(12): 120401.
- [14] CAVALCANTI D, SKRZYPCZYK P. Quantum steering: a review with focus on semidefinite programming[J]. Reports on Progress in Physics, 2016, 80(2): 024001.
- [15] GABRIEL A, HIESMAYR B C, HUBER M. Criterion for k -separability in mixed multipartite states[J]. Quantum Information and Computation, 2010, 10(9&10): 829–836.
- [16] YAN S Q, HOU J C. Entanglement witness criteria of strong- k -separability for multipartite quantum states[J]. Quantum Information Processing, 2018, 17(7): 1–8.

-
- [17] YANG Y, CAO H X, MENG H X. Robustness of Λ -entanglement of multipartite states[J]. Quantum Information Processing, 2019, 18(12): 1–17.
- [18] LUO S L. Using measurement-induced disturbance to characterize correlations as classical or quantum[J]. Physical Review A, 2008, 77(2): 022301.
- [19] WU S X, ZHANG J, YU C S, et al. Uncertainty-induced quantum nonlocality[J]. Physics Letters A, 2014, 378(4): 344–347.
- [20] BAUMGRATZ T, CRAMER M, PLENIO M B. Quantifying coherence[J]. Physical Review Letters, 2014, 113(14): 140401.
- [21] DOWLING M R, DOHERTY A C, WISEMAN H M. Entanglement of indistinguishable particles in condensed-matter physics[J]. Physical Review A, 2006, 73(5): 052323.
- [22] HELSTROM C W. Quantum detection and estimation theory[J]. Journal of Statistical Physics, 1969, 1(2): 231–252.
- [23] BRAUNSTEIN S L, CAVES C M. Statistical distance and the geometry of quantum states[J]. Physical Review Letters, 1994, 72(22): 3439–3443.
- [24] MODI K, CABLE H, WILLIAMSON M, et al. Quantum correlations in mixed-state metrology[J]. Physical Review X, 2011, 1(2): 021022.
- [25] LI N, LUO S L. Entanglement detection via quantum Fisher information[J]. Physical Review A, 2013, 88: 014301.
- [26] MUTHUGANESAN R, CHANDRASEKAR V K. Asymmetry-induced nonclassical correlation[J]. Quantum Information Processing, 2021, 20(10): 1–13.
- [27] WANG Y Z, HOU J C. Some necessary and sufficient conditions for k -separability of multipartite pure states[J]. Quantum Information Processing, 2015, 14(10): 3711–3722.

责任编辑: 刘 炜