

机械臂系统在任务空间的脉冲跟踪控制

戴清霞, 马米花*

(闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘要:基于拉格朗日方程,在任务空间中研究机械臂系统的脉冲跟踪控制。在任务空间中,给定一个期望的时变轨道,设计脉冲控制器使得机械臂末端执行器能够跟踪到期望的轨道,并且将跟踪误差控制在期望的范围内。通过脉冲控制,机械臂只需在一些离散的时刻接收期望轨道的信息,这可以在很大程度上减少信息传输的负担。最后以任务空间中双连杆机械臂的跟踪控制为例,验证设计的控制策略是可行且有效的。

关键词:机械臂系统;任务空间;脉冲控制;拉格朗日方程

中图分类号:O231.2

文献标志码:A

文章编号:1674-4942(2022)01-0001-09

Impulsive Tracking Control of Robotic Manipulator in Task Space

DAI Qingxia, MA Mihua*

(School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract:Based on Lagrangian equation, impulsive tracking control of robotic manipulator in task space was developed in this paper. In task space, given a desired time-varying trajectory, the robot end-effector can track the desired target under the designed impulsive controller. Besides, the desired tracking error bound can be obtained. By impulsive control, robotic manipulator can receive the information of the desired trajectory at some discrete moments, which implies that the amount of information needed to be transferred was greatly reduced. The obtained results were finally applied to a typical system of double link robotic manipulator, which demonstrates the effectiveness and feasibility of the proposed control strategy.

Keywords: robotic manipulator; task space; impulsive control; Lagrangian equation

近年来,机械系统的控制已经引起了很多领域的广泛关注,其中,机械臂可以根据要求模拟人类的手臂活动,帮助人类完成很多复杂多样的任务,比如高效地完成组装传输等任务,因此,机械臂在工业生产、制造业、医疗等领域有着愈来愈重要的应用^[1-3]。在这些应用中,设计精确的控制器确保机械臂有效安全地工作已经成为一个重要的课题。例如,文献[4]提出存在模型不确定性和外部干扰的机械臂的分阶自适应反步控制,文献[5]通过在常用的PID控制器中添加非线性比例项和导数项,提出非线性比例积分导数控制器。

上述提到的与机械臂有关的控制策略都是基于关节空间分析的。实际上,设计一种控制器确保任务空间中机械臂末端执行器的位置可以跟踪到期望的轨道更具有挑战性。大多数情况下,对于工业机器人来说,所进行的传输、焊接、装配等任务都要求机械臂末端执行器在任务空间中跟踪到期望的轨道。例如,文献[6]提出使用傅立叶级数展开对机械臂的自适应任务空间控制,文献[7]将比例微分方程应用于机械臂任务空间控制,文献[8]提出一种基于观测器的刚性连杆机器人自适应输出反馈跟踪控制器。

虽然关于机械臂在任务空间的控制问题已经有很多成果,但是大部分考虑的是连续控制。实际操作

收稿日期:2021-10-19

基金项目:国家自然科学基金项目(61603174);福建省自然科学基金项目(2020J01793)

第一作者:戴清霞(1998—),福建莆田人,硕士研究生,研究方向为动力学系统的协调控制。E-mail:1397619036@qq.com

*通信作者:马米花(1980—),福建漳州人,副教授,研究方向为动力学系统的协调控制。E-mail:mamihua206@163.com

中,由于不对称性的信息、个体感知能力及成本消耗等影响,连续控制往往很难实现。根据文献[9]可知,不连续控制策略比连续控制更有效且成本更低。而脉冲动力学是由连续和离散相结合的动力学行为,通过脉冲约束或脉冲力产生脉冲效应可使智能体的广义位移或速度发生瞬时改变^[10-12]。因此,脉冲控制已成为一种有效的不连续控制方法。有关脉冲控制的研究成果也有不少^[13-16],比如文献[13]探讨非线性脉冲动力系统的渐近稳定性问题并为混沌系统设计脉冲控制器,文献[14]提出将脉冲控制用于混沌同步的研究,文献[15]提出基于脉冲控制的机械臂系统在关节空间中可以同步到期望的轨道,文献[16]结合事件触发机制提出事件触发脉冲控制器。可是,目前似乎还未见脉冲控制策略用于研究任务空间中机械臂系统跟踪问题的相关成果。所以,本文提出用于任务空间中机械臂跟踪问题的脉冲控制策略,即在任务空间中给定一个期望的时变轨道,机械臂末端执行器能够在设计的脉冲控制器下跟踪到该期望的轨道,并且将跟踪误差控制在期望的范围内。最后将所得到的理论结果用于实现双连杆机械臂的跟踪控制。

1 机械臂系统模型

在没有摩擦和其他干扰的条件下, n 连杆机械臂系统在关节空间中的动力学表达式可以用如下的拉格朗日方程描述^[17-19]为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau, \quad (1)$$

其中, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 是关节空间位置, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 和 $\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 分别是关节空间速度和加速度, $M(q): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ 是对称正定的惯量矩阵, $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbf{R}^n$ 是科氏力和离心力, $g(q)$ 是广义有势力, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 是施加在机械臂系统上的待设计的外部控制输入广义力或广义矩。根据文献[17-19],机械臂系统(1)有以下重要的性质:

性质1(反对称性) $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ 是反对称矩阵,即对于 $\forall y \in \mathbf{R}^n, y^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] y = 0$ 。

性质2(有界性) 存在正常数 \underline{M} 、 \bar{M} 和 k_c ,使得 $\underline{M} \leq \|M(q)\| \leq \bar{M}, \|C(q, \dot{q})\| \leq k_c \|\dot{q}\|$ 成立。对于 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 及 $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$, y 和 D 的范数分别被定义为 $\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ 和 $\|D\| = \sqrt{\lambda_{\max}(D^T D)}$,其中 D^T 表示转置矩阵, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示最大特征值。

如果令 $\tau = g(q)$,那么机械臂系统(1)的动力学表达式可以写为

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = 0. \quad (2)$$

对于系统(2),关节空间速度 \dot{q} 是有界的。选择一个李雅普诺夫函数 $W(t) = \dot{q}^T M(q) \dot{q}$, $W(t)$ 沿着系统(2)的轨线求导得到

$$\dot{W}(t) = -2\dot{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q} + \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} = \dot{q}^T (\dot{M} - 2C(q, \dot{q})) \dot{q} = 0.$$

因此,可以得到 $\underline{M} \|\dot{q}\|^2 \leq W(t) = W(0)$,即 $\|\dot{q}\| \leq \sqrt{\frac{W(0)}{\underline{M}}} = \varepsilon, \varepsilon > 0$,即证明了关节空间速度 \dot{q} 是有界的。因为脉冲控制是属于不连续控制策略,所以需要考虑 $\|\dot{q}\|$ 是有界的机械臂系统。

在任务空间中末端执行器位置的期望轨道是给定的,本研究将该期望的时变轨道记为 $x_d(t)$,且 $\|x_d(t)\|, \|\dot{x}_d(t)\|, \|\ddot{x}_d(t)\|$ 是有界的。令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 表示机械臂系统末端执行器的位置向量,它与关节空间位置向量 q 的关系可以表示为

$$x = h(q), \dot{x} = J(q) \dot{q}, \quad (3)$$

其中, $h(q): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 表示关节空间和任务空间之间的映射, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 表示任务空间末端执行器的速度向量。这里假设位置传感器可以接收末端执行器的位置,那么任务空间被定义为笛卡尔空间。

$J(q) = \frac{\partial h(q)}{\partial q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示从关节空间到任务空间的雅可比矩阵, $J^*(q)$ 表示它的伴随矩阵。对于 n 连杆机械臂系统, $h(q)$ 中的每个元素是三角函数, 也就意味着 $x, J(q), J^*(q), \dot{J}(q)$ 的每个元素都是有界的。因此, $\|x\|$, $\|J(q)\|$, $\|J^*(q)\|$, $\|\dot{J}(q)\|$ 是有界的。又由于 $\|\dot{q}\|$ 有界, 所以 $\|\dot{x}\|$ 是有界的。本文假设雅可比矩阵 $J(q)$ 是满秩的矩阵, 即 $|J(q)| \neq 0$, 由于 $J^{-1}(q) = J^*(q) / |J(q)|$, 所以 $\|J^{-1}(q)\|$ 也是有界的。

2 脉冲控制策略

在任务空间中, 机械臂系统(1)末端执行器的位置被要求跟踪到期望的轨道, 即给定一个期望的时变轨道 $x_d(t) \in \mathbf{R}^n$, 本研究的目标是设计脉冲控制器 τ 使得机械臂系统末端执行器的位置可以跟踪到期望的时变轨道 $x_d(t)$, 并且具有理想误差界。为此, 定义跟踪误差为 $\tilde{x}(t) = x(t) - x_d(t)$, 基于实用稳定性定义, 引入如下的实用跟踪定义。

定义1 任意给定机械臂系统(1)的一个初始条件以及给定 $h > 0$, 如果存在常数 $T_0 \in \mathbf{R}^+$ 使得 $\forall t > T_0$ 时, 有

$$\tilde{x}(t) \in B \stackrel{\text{def}}{=} \{ \tilde{x}(t) \in \mathbf{R}^n \mid \|\tilde{x}(t)\| \leq h \} \quad (4)$$

成立, 则称机械臂系统(1)末端执行器的位置可以跟踪到期望的时变轨道, 并且称 h 为期望的跟踪误差界。

显然, 取 $\tau = g(q)$ 无法使机械臂系统(1)达到跟踪控制, 下面我们将设计脉冲跟踪控制律来实现机械臂系统(1)在任务空间中的跟踪控制。从物理观点来看, 脉冲力或者脉冲约束都会产生脉冲效应, 从而导致系统状态的突然改变。此外, 狄拉克函数能够很好地描述这种瞬时改变系统状态的演化过程。因此, 对机械臂系统(1)设计如下脉冲跟踪控制律

$$\tau = g(q) - \mu J^{-1} M(q) \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t_k) [\dot{x} - \dot{x}_d + \alpha(x - x_d)], \quad (5)$$

其中, μ 和 α 是待设计的控制增益常数, $\mu > 0, \alpha > 0$ 。控制律中第一项为非线性补偿项, 其使得 $\|\dot{q}\|$ 有界; 第二项含有狄拉克函数 $\delta(t - t_k)$, 表示系统在时刻 $t = t_k, k \in \mathbf{N}^+$ 时具有脉冲约束引起的脉冲效应。根据狄拉克函数的性质可知, 在 $t \neq t_k$ 时, 有 $\delta(t - t_k) = 0$, 这意味着该系统只有在瞬时刻 t_k 时才需要接收期望时变轨道 $x_d(t)$ 的信息, 这就减少了信息传输的负担。令 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ 表示脉冲时间间隔, 时间序列 t_k 满足 $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ 。为了方便, 本研究用 δ 表示等距且分离的脉冲时间间隔序列, 即 $t_k - t_{k-1} = \delta, \delta > 0$ 。

为进一步讨论, 引入参考状态变量 r 和 s ,

$$r = J^{-1}(\dot{x}_d - \alpha \tilde{x}), s = J^{-1}(\dot{x} - \dot{x}_d + \alpha \tilde{x}) = \dot{q} - r, \quad (6)$$

结合式(6)的第二个等式, 可以得到 $\dot{q} = s + r, \ddot{q} = \dot{s} + \dot{r}$ 。

根据式(6)引入的变量以及脉冲跟踪控制律(5), 机械臂系统(1)可以改写成

$$M(q) \dot{s} = -\Delta - C(q, \dot{q}) s - \mu M(q) \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - t_k) s, \quad (7)$$

其中 $\Delta = M(q) \dot{r} + C(q, \dot{q}) r$ 。应用性质2的不等式可以得到

$$\begin{aligned} \|\Delta\| &= \|M(q) \dot{r} + C(q, \dot{q}) r\| \\ &\leq \|M(q)\| \|\dot{r}\| + \|C(q, \dot{q})\| \|r\| \\ &\leq \bar{M} \|\dot{r}\| + k_c \|\dot{q}\| \|r\|. \end{aligned} \quad (8)$$

根据式(6)的第一个等式可以得到

$$\|r\| \leq \|J^{-1}\| \left[\|\dot{x}_d\| + \alpha (\|x\| + \|x_d\|) \right] \quad (9)$$

及

$$\alpha x = \dot{x}_d + \alpha x_d - J(q) r. \quad (10)$$

对等式(10)两边求导,得到

$$\alpha \dot{x} = \ddot{x}_d + \alpha \dot{x}_d - \dot{J}(q) r - J(q) \dot{r}. \quad (11)$$

由等式(11)可以得到

$$\dot{r} = -J^{-1}(q) [\alpha (\dot{x} - \dot{x}_d) - \ddot{x}_d + \dot{J}(q) r]. \quad (12)$$

由于 $\|J^{-1}(q)\|$ 、 $\|\dot{x}\|$ 、 $\|\dot{x}_d\|$ 、 $\|\ddot{x}_d\|$ 、 $\|\dot{J}(q)\|$ 、 $\|r\|$ 和 $\|J^{-1}(q)\|$ 有界,所以从式(12)可以得到

$$\|\dot{r}\| \leq \|J^{-1}(q)\| [\alpha (\|\dot{x}\| + \|\dot{x}_d\|) + \|\ddot{x}_d\| + \|\dot{J}(q)\| \|r\|] \leq \eta, \eta > 0. \quad (13)$$

结合不等式(9)和(13),则不等式(8)可以写成

$$\|\Delta\| \leq \bar{M} \|\dot{r}\| + k_c \|\dot{q}\| \|r\| \leq \bar{M} \eta + k_c \varepsilon \|r\|. \quad (14)$$

对系统(7)进一步讨论,应用狄拉克函数的性质,可以得到非脉冲时刻系统如下

$$M(q) \dot{s} = -\Delta - C(q, \dot{q}) s, t \neq t_k, t \geq t_0. \quad (15)$$

对于脉冲时刻 $t = t_k$ 的情况,令 $\lim_{t \rightarrow t_k^-} s(t) = s(t_k^-)$ 和 $\lim_{t \rightarrow t_k^+} s(t) = s(t_k^+)$ 。进一步假设 $s(t)$ 在 $t = t_k, k \in N^+$ 时是左连续的,即 $s(t_k^-) = s(t_k)$,于是在 $t = t_k$ 时刻对系统(7)的两边作积分得

$$\Delta s(t_k) = s(t_k^+) - s(t_k^-) = -\mu s(t_k), \quad (16)$$

也可以写成

$$s(t_k^+) = s(t_k^-) - \mu s(t_k^-). \quad (17)$$

因此,可以得到如下脉冲动力系统

$$\begin{cases} M(q) \dot{s} = -C(q, \dot{q}) s - \Delta, t \neq t_k, \\ s(t_k^+) = (1 - \mu) s(t_k^-), t = t_k, k \in N^+. \end{cases} \quad (18)$$

3 代数跟踪判据

为了实现机械臂系统在任务空间的脉冲跟踪控制,本节导出了一些代数通用准则,并设计适当的控制增益 μ 、反馈增益 α 和脉冲时间间隔 δ 使得机械臂系统(1)末端执行器的位置在脉冲跟踪控制律(5)的作用下可以跟踪到期望的时变轨道。下面给出本研究的重要定理。

定理 1 若控制增益 μ 、脉冲时间间隔 δ 和反馈增益 α 满足

$$(A1) 0 < \mu < 1; (A2) \delta < -\frac{h}{v_0} \ln(1 - \mu)^2; (A3) \alpha > J_0,$$

其中, $h > 0, \|J(q)\| \leq J_0, J_0 > 0, v_0 = \frac{2(\bar{M}\eta + k_c \varepsilon^2 + h k_c \varepsilon)}{M}$,那么任务空间中机械臂系统(1)末端执行器的位置在脉冲跟踪控制律(5)的作用下可以跟踪到目标轨道 $x_d(t)$,且跟踪误差界为 h 。

证明 首先证明存在 $T_1 > 0$,当 $\forall t > T_1$,使得

$$s(t) \in B_s \stackrel{\text{def}}{=} \{s(t) \in \mathbf{R}^n \mid \|s(t)\| < h\}. \quad (19)$$

为此选取一个二次李雅普诺夫函数

$$V(s(t)) = s^T(t) M(q) s(t),$$

若 $s(t) \in \mathbf{R}^n \setminus B_s$,那么 $\|s(t)\| \geq h$,有 $\|s(t)\| \leq \frac{s^T(t) s(t)}{h}$ 。当 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 时, $V(s(t))$ 沿着系统(18)第一个方程的轨线求Dimi导数得

$$\begin{aligned}
D^+V(s(t)) &= 2s^T(t)M(q)\dot{s}(t) + s^T(t)\dot{M}(q)s(t) \\
&= 2s^T(t)[-C(q,\dot{q})s(t) - \Delta] + s^T(t)\dot{M}(q)s(t) \\
&= -2s^T(t)\Delta \leq 2\|s^T(t)\|\|\Delta\| \\
&\leq 2\|s^T(t)\|\left[\bar{M}\eta + k_c\mathcal{E}(\|\dot{q}(t)\| + \|s(t)\|)\right] \\
&\leq 2\bar{M}\eta\|s(t)\| + 2k_c\mathcal{E}\|s(t)\|(\|\dot{q}(t)\| + \|s(t)\|) \\
&\leq 2(\bar{M}\eta + k_c\mathcal{E}^2)\|s(t)\| + 2k_c\mathcal{E}s^T(t)s(t) \\
&\leq \frac{2(\bar{M}\eta + k_c\mathcal{E}^2 + hk_c\mathcal{E})}{h\underline{M}}s^T(t)Ms(t) = \frac{v_0}{h}V(s(t)),
\end{aligned} \tag{20}$$

根据 $\dot{M} - 2C$ 的反对称性质,两边积分得

$$V(s(t)) \leq V(s(t_k^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_k)}, t \in (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, 2, \dots \tag{21}$$

另一方面,在脉冲时刻 $t = t_k$ 时,如果条件(A1)满足,则可以从系统(18)的第二个方程推导出

$$\begin{aligned}
V(s(t_k^+)) &= s^T(t_k^+)M(q)s(t_k^+) \\
&= (1-\mu)s(t_k^-)M(q)(1-\mu)s(t_k^-) \\
&= (1-\mu)^2s^T(t_k^-)M(q)s(t_k^-) \\
&= (1-\mu)^2V(s(t_k^-)),
\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $0 < \mu < 1$ 。根据式(21)和式(22),下面用数学归纳法验证 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 时,有

$$V(s(t)) \leq (1-\mu)^{2k}V(s(t_0^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_0)} \tag{23}$$

成立。当 $k = 0$, $t \in (t_0, t_1]$ 时,得

$$V(s(t)) \leq V(s(t_0^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_0)} = (1-\mu)^{2 \times 0}V(s(t_0^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_0)}。$$

当 $k = 1$, $t \in (t_1, t_2]$ 时,有

$$\begin{aligned}
V(s(t)) &\leq V(s(t_1^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_1)} \\
&= (1-\mu)^2V(s(t_1^-)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_1)} \\
&\leq (1-\mu)^2V(s(t_0^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t_1-t_0)} e^{\frac{v_0}{h}(t-t_1)} \\
&= (1-\mu)^{2 \times 1}V(s(t_0^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_0)}。
\end{aligned}$$

假设当 $t \in (t_{k-1}, t_k]$ 时, $V(s(t)) \leq (1-\mu)^{2(k-1)}V(s(t_0^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_0)}$, $k \geq 3$ 成立。那么,当 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 时,得

$$\begin{aligned}
V(s(t)) &\leq V(s(t_k^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_k)} \\
&= (1-\mu)^2V(s(t_k^-)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_k)} \\
&\leq (1-\mu)^2(1-\mu)^{2 \times (k-1)}V(s(t_0^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t_k-t_0)} e^{\frac{v_0}{h}(t-t_k)} \\
&= (1-\mu)^{2k}V(s(t_0^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_0)}。
\end{aligned}$$

因此,根据数学归纳法得到 $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 时,有不等式(23)成立。又因为 $k \leq \frac{t-t_0}{\delta}$,于是

$$V(s(t)) \leq (1-\mu)^{\frac{2(t-t_0)}{\delta}}V(s(t_0^+)) e^{\frac{v_0}{h}(t-t_0)}$$

$$= V(s(t_0^+)) e^{\left(\frac{\ln(1-\mu)^2}{\delta} + \frac{v_0}{h}\right)(t-t_0)}.$$

由条件(A2)知 $\frac{\ln(1-\mu)^2}{\delta} + \frac{v_0}{h} < 0$ 。因此当 $k \rightarrow \infty$ 时, $V(s(t)) \rightarrow 0$ 。即李雅普诺夫函数 $V(s(t))$ 是单调减少直到 $s(t) \in B_s$ 。说明总存在 $T_1 > 0$, 使得 $\forall t > T_1$, 有 $\|s(t)\| < h$ 。

接下来证明存在 $T_0 > T_1$, 使得对于 $\forall t > T_0$ 时, 有 $\|\tilde{x}(t)\| < h$ 。从上面已经知道, 在定理1的条件下, 总存在 $\forall t > T_1$ 时, 有 $\|s(t)\| < h$ 。为了证明 $\|\tilde{x}(t)\| < h$, 需要从式(6)的第一个等式推导出关于 $\tilde{x}(t)$ 的表达式如下:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\alpha\tilde{x}(t) + Js(t). \quad (24)$$

对于方程(24), 选取李雅普诺夫函数 $v(t) = \frac{1}{2}\tilde{x}^T(t)\tilde{x}(t)$ 。当 $\|\tilde{x}(t)\| \geq h$ 时, 有 $\|\dot{\tilde{x}}(t)\| \leq \frac{\tilde{x}^T(t)\tilde{x}(t)}{h}$, 将 $v(t)$ 沿着方程(24)的轨线求导得到

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \tilde{x}^T(t)\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{x}^T(t)Js(t) - \alpha\tilde{x}^T(t)\tilde{x}(t) \\ &\leq \|\tilde{x}(t)\|\|J\|\|s(t)\| - \alpha\tilde{x}^T(t)\tilde{x}(t) \\ &\leq J_0\tilde{x}^T(t)\tilde{x}(t) - \alpha\tilde{x}^T(t)\tilde{x}(t) = (J_0 - \alpha)\tilde{x}^T(t)\tilde{x}(t). \end{aligned} \quad (25)$$

由定理1条件(A3)得到 $\alpha > J_0$, 李雅普诺夫函数 $v(t)$ 是负定函数。因此总存在 $T_0 > T_1$, 使得对于 $\forall t > T_0$ 时, 有 $\|\tilde{x}(t)\| < h$ 。因此, 当定理1条件满足时, 机械臂系统(1)在脉冲跟踪控制律(5)的作用下能够实现具有误差界 h 的跟踪控制。

注1 定理1的条件是充分非必要条件, 即在不满足定理1的条件下, 机械臂系统末端执行器的位置在本文设计的脉冲控制器下可能仍然可以跟踪到期望位置 $x_d(t)$ 。这将在应用例子中得到验证。

4 应用例子及数值模拟

本节通过数值模拟验证前面提出的脉冲控制器的有效性。以双连杆机械臂作为本文的应用例子, 如图1所示。根据文献[9], 它的动力学行为可以由拉格朗日方程(1)来描述。

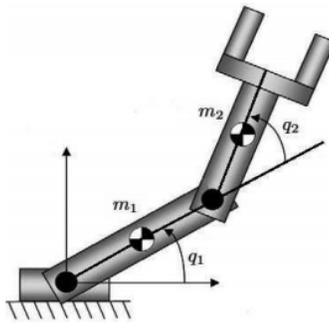


图1 双连杆机械臂^[9]

Figure 1 Double link manipulator^[9]

图1中机械臂关节空间位置定义为 $q = (q_1, q_2)^T$, 两个连杆的质量分别定义为 m_1 和 m_2 , 下杆和上杆的惯量分别记为 I_1 和 I_2 , 其长度分别为 l_1 和 l_2 , 而连接点到杆质心的长度分别记为 l_{c1} 和 l_{c2} 。拉格朗日方程中的惯量矩阵、矩阵 C 和广义有势力分别为

$$M(q) = \begin{pmatrix} \theta_1 + 2\theta_2 \cos q_2 & \theta_3 + \theta_2 \cos q_2 \\ \theta_3 + \theta_2 \cos q_2 & \theta_3 \end{pmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -\theta_2 \dot{q}_2 \sin q_2 & -\theta_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ \theta_2 \dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g(q) = \begin{pmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix},$$

其中, $\theta_1 = I_1 + I_2 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2)$, $\theta_2 = m_2 l_1 l_{c2}$, $\theta_3 = I_2 + m_2 l_{c2}^2$, $\theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1$, $\theta_5 = m_2 l_{c2}$, $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ 为重力加速度。

由关节位置 q 到末端执行器位置 x 的非线性映射 h 表示为

$$x = (x_1, x_2)^T = \begin{pmatrix} l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix}.$$

因此,

$$J(q) = \frac{\partial h(q)}{\partial q} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}.$$

在下面的数值模拟中,任务空间中末端执行器的期望位置取为 $x_d = (x_{d1}, x_{d2})^T = (0.2 \cos(0.3t + 5), 0.2 \sin(0.3t + 5))^T$ 。机械臂的每根连杆的质量分别设为 $m_1 = 1.6 \text{ kg}$, $m_2 = 0.9 \text{ kg}$, 每根连杆的长度分别为 $l_1 = 0.6 \text{ m}$, $l_2 = 0.5 \text{ m}$, 连接点到连杆质心的距离分别为 $l_{c1} = 0.4 \text{ m}$, $l_{c2} = 0.3 \text{ m}$, 每根连杆的惯量分别为 $I_1 = \frac{1}{3} m_1 l_{c1}^2$, $I_2 = \frac{1}{3} m_2 l_{c2}^2$ 。除此之外,机械臂系统的初值任意取为 $q(0) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{8}\right)^T$, $\dot{q}(0) = (0, 0)^T$, 期望的跟踪误差界取为 $h = 0.02$ 。

基于上述数据,通过计算可以得到 $\underline{M} = 0.0391$, $\bar{M} = 1.1662$, $k_c = 0.6480$, $\|J(q)\| \leq J_0 = 1.5189$ 及 $\|\dot{q}\| \leq \varepsilon = 0.0023$ 。根据定理1的条件(A1)和(A3)分别取 $\mu = 0.98$, $\alpha = 1.6$, 进一步由条件(A2)得脉冲时间间隔 $\delta < 0.0329$ 。于是,取 $\mu = 0.98$, $\alpha = 1.6$ 和 $\delta = 0.03$ 满足定理1的条件,模拟结果见图2和图3。显然,图2和图3表明机械臂末端执行器的位置可以跟踪到期望的轨道 $x_d(t)$ 。由图2可以看到,当 $t > 3$ 时,跟踪误差 $\|x(t) - x_d(t)\| < 0.02$, 证明本文设计的脉冲控制策略是有效可行的。

根据注1,定理1的条件是充分非必要的。为了说明这个情况,取脉冲时间间隔 $\delta = 0.5$, 而其他数据和图2中的数据相同,这时定理1的条件显然不满足,但是模拟结果表明在脉冲控制器的作用下机械臂末端执行器的位置仍然可以跟踪到期望的轨道 $x_d(t)$, 如图4和5所示。和图2相比,图4显示当 $t > 3$ 时,跟踪误差界仍然小于0.02。因此,正如注1所述,定理1的条件是充分非必要的,这就使得本研究设计的脉冲控制器更加具有实用性。

如果取脉冲时间间隔 $\delta = 1$, 而其他数据和图2中的数据相同,跟踪误差模拟结果如图6所示,机械臂末端执行器的位置仍然可以跟踪到期望的轨道 $x_d(t)$, 和图2或图4相比,需要更长的时间才能实现跟踪误差控制界 $h \leq 0.02$ 。因此,在工程上可以根据需要选取适当的控制参数使得机械臂系统在脉冲跟踪控制律(5)的作用下实现对期望轨道的跟踪控制。

5 结论

本研究设计了脉冲控制实现机械臂系统在任务空间中的跟踪控制。在任务空间中,给定期望的时变轨道,机械臂系统末端执行器能在设计的脉冲控制器下跟踪到期望的位置。通过脉冲控制,机械臂系统不用连续接收期望轨道的信息,只需要在脉冲时刻接收期望轨道的信息。将其应用于双连杆机械臂的跟踪控制,仿真结果表明了本研究提出的脉冲控制策略和代数判据是有效且可行的。

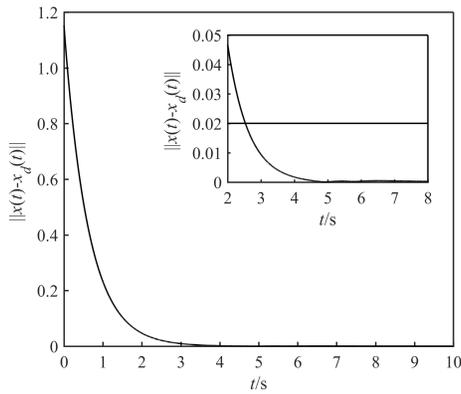


图2 取 $\alpha = 1.6$ 、 $\mu = 0.98$ 和 $\delta = 0.03$ 时跟踪误差 $\|x(t) - x_d(t)\|$ 的时间演化

Figure 2 Evolution of $\|x(t) - x_d(t)\|$ with $\alpha = 1.6, \mu = 0.98$ and $\delta = 0.03$

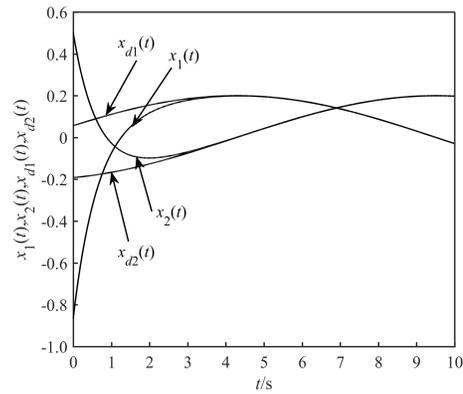


图3 取 $\alpha = 1.6$ 、 $\mu = 0.98$ 和 $\delta = 0.03$ 时

末端执行器的位置 $x = (x_1, x_2)^T$ 跟踪到期望轨道

Figure 3 The end-effector position $x = (x_1, x_2)^T$ can track the desired trajectory when $\alpha = 1.6, \mu = 0.98$ and $\delta = 0.03$

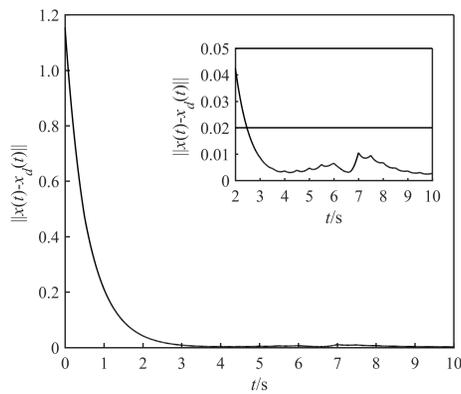


图4 取 $\alpha = 1.6$ 、 $\mu = 0.98$ 和 $\delta = 0.5$ 时跟踪误差 $\|x(t) - x_d(t)\|$ 的时间演化

Figure 4 Evolution of $\|x(t) - x_d(t)\|$ with $\alpha = 1.6, \mu = 0.98$ and $\delta = 0.5$

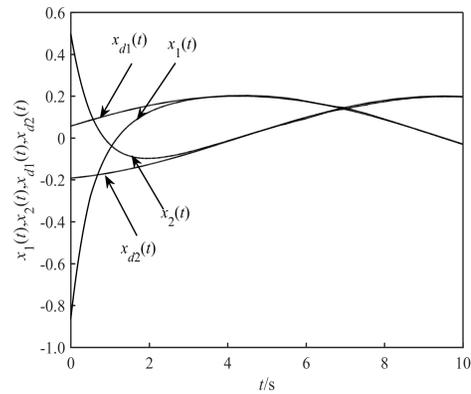


图5 取 $\alpha = 1.6$ 、 $\mu = 0.98$ 和 $\delta = 0.5$ 时

末端执行器的位置 $x = (x_1, x_2)^T$ 跟踪到期望轨道

Figure 5 The end-effector position $x = (x_1, x_2)^T$ can track the desired trajectory when $\alpha = 1.6, \mu = 0.98$ and $\delta = 0.5$

参考文献:

- [1] MARKUS E D, AGEE J T, JIMOH A A. Flat control of industrial robotic manipulators[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2017, 87: 226–236.
- [2] FILIPESCU A, MINCĂ E, FILIPESCU A, et al. Manufacturing technology on a mechatronics line assisted by autonomous robotic systems, robotic manipulators and visual servoing systems[J]. Actuators, 2020, 9(4): 127.
- [3] PENNING R S, JUNG J, BORGSTADT J A, et al. Towards closed loop control of a continuum robotic manipulator for medical applications[C]//2011 International Conference on Robotics and Automation. Piscataway: IEEE Press, 2011: 4822–4827.
- [4] NIKDEL N, BADAMCHIZADEH M, AZIMIRAD V, et al. Fractional-order adaptive backstepping control of robotic manipulators in the presence of model uncertainties and external disturbances[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(10): 6249–6256.
- [5] SU Y X, ZHENG C H. PID control for global finite-time regulation of robotic manipulators[J]. International Journal of Systems Sci-

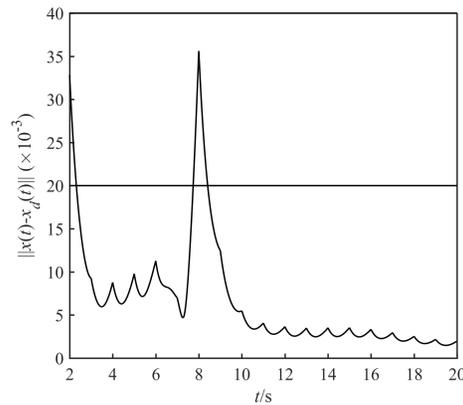


图6 取 $\alpha = 1.6$ 、 $\mu = 0.98$ 和 $\delta = 1.0$ 时跟踪误差 $\|x(t) - x_d(t)\|$ 的时间演化

Figure 6 Evolution of $\|x(t) - x_d(t)\|$ with $\alpha = 1.6$, $\mu = 0.98$ and $\delta = 1.0$

ence, 2017, 48(3): 547–558.

- [6] GHOLIPOUR R, FATEH M M. Adaptive task-space control of robot manipulators using the Fourier series expansion without task-space velocity measurements[J]. Measurement, 2018, 123: 285–292.
- [7] IZADBAKHSH A, KHORASHADIZADEH S. Robust task-space control of robot manipulators using differential equations for uncertainty estimation[J]. Robotica, 2017, 35(9): 1923–1938.
- [8] DOGAN K M, TATLICIOGLU E, ZERGEROGLU E, et al. Learning control of robot manipulators in task space[J]. Asian Journal of Control, 2018, 20(3): 1003–1013.
- [9] MA M H, CAI J P. An intermittent controller for robotic manipulator with uncertain dynamics in task space[J]. International Journal of Modern Physics C, 2021, 32(2): 2150021.
- [10] YANG Z C, XU D Y. Stability analysis and design of impulsive control systems with time delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(8): 1448–1454.
- [11] YANG T, CHUA L O. Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1997, 44(10): 976–988.
- [12] TANG Y, XING X, KARIMI H R, et al. Tracking control of networked multi-agent systems under new characterizations of impulses and its applications in robotic systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(2): 1299–1307.
- [13] LI H J, LIU A P. Asymptotic stability analysis via indefinite Lyapunov functions and design of nonlinear impulsive control systems[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2020, 38: 100936.
- [14] MA M H, HUA Z, CAI J P, et al. Impulsive practical synchronization of n -dimensional nonautonomous systems with parameter mismatch[J]. Kybernetika, 2013, 49(4): 539–553.
- [15] MA M H, ZHOU J, CAI J P. Impulsive practical tracking synchronization of networked uncertain Lagrangian systems without and with time-delays[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2014, 415: 116–132.
- [16] LI X D, ZHANG T X, WU J H. Input-to-state stability of impulsive systems via event-triggered impulsive control[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020: 33449902.
- [17] MEI J, REN W, MA G F. Distributed containment control for Lagrangian networks with parametric uncertainties under a directed graph[J]. Automatica, 2012, 48(4): 653–659.
- [18] KELLY R, SALGADO R. PD control with computed feedforward of robot manipulators: a design procedure[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1994, 10(4): 566–571.
- [19] ABDESSAMEUD A, TAYEBI A. Synchronization of networked Lagrangian systems with input constraints[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2011, 44(1): 2382–2387.