

构造奇数平方阶最完美幻方的方法

詹 森¹, 王辉丰^{2*}

(1. 广东技术师范大学 计算机科学系, 广东 广州 510665;

2. 海南师范大学 数学与统计学院, 海南 海口 571158)

摘 要: 本文提出奇数平方阶最完美幻方的通用构造方法, 并巧妙运用独特的余函数法给以理论证明。

关键词: 奇数阶; 奇数平方阶; 最完美幻方; 中心对称幻方; 余函数法

中图分类号: O151.2

文献标志码: A

文章编号: 1674-4942(2021)03-0274-05

A Method for Constructing the Most Perfect Magic Square of Odd-square Order

ZHAN Sen¹, WANG Huifeng^{2*}

(1. Department of Computer Science, Guangdong Technical Normal University, Guangdong 510665, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou 571158, China)

Abstract: In this paper, the universal method for constructing the most perfect magic square of odd-square order was put forward, and the residual function method was skillfully used to prove this method theoretically.

Keywords: odd order; odd-square order; the most perfect magic square; central symmetric magic square; remainder function method

文献[1]解决了构造双偶数阶最完美幻方的棘手难题, 给出了理论证明。文献[2]将其推广到双偶数阶空间最完美幻立方。在此基础上, 本文进而给出构造 $n^2(n = 2m + 1, m$ 是自然数)阶最完美幻方的三步法及其证明, 我们还可给出构造奇数平方阶空间最完美幻立方的方法(见注), 这就比较全面解决了构造最完美幻方及幻立方的难题。

分三部分讨论奇数平方阶最完美幻方的构造方法如下:

1 奇数平方阶最完美幻方的定义^[1-3]

类比双偶数阶最完美幻方的定义^[1], 给出奇数平方阶最完美幻方的定义如下:

设任一个 $n^2(n = 2m + 1, m$ 是自然数)阶幻方为 Ω , 若 Ω 是一个中心对称完美幻方且满足: 1) 从 Ω 中任一点出发, 在同一行中向右依次取相距 k 个位置($k = 1, 2, \dots, n$)的数直至取到第 n 个数, 再以这些数为起点在同一列中向下依次取相距 k 个位置($k = 1, 2, \dots, n$)的数直至取到第 n 个数, 由这些数组成一个 $n \times n$ 方阵(包括跨边界的 $n \times n$ 方阵), 其 n^2 个数字的和都等于 n^2 阶幻方的幻方常数; 2) 从 Ω 中任何一个位置出发, 按国际象棋中的马步沿一个方向走下去, 历经 n^2 步必回到出发点, 所历经的 n^2 个数字之和都等于 n^2 阶幻方的幻方常数, 则 Ω 称为 $n^2(n = 2m + 1, m$ 是自然数)阶最完美幻方(见定理及证明)。

显然, 除奇数平方阶最完美幻方外, 不存在任何其他奇数阶幻方是最完美幻方。

收稿日期: 2020-12-28

第一作者: 詹森(1939—), 海南海口人, 副教授, 研究方向为近世代数。E-mail: ricky_tsim@ailyun.com

*通信作者: 王辉丰(1936—), 海南琼海人, 教授, 研究方向为计算数学、常微定性理论。E-mail: hfwang@hainnu.edu.cn

2 构造 $n^2(n = 2m + 1, m$ 是自然数)阶最完美幻方的三步法

第1步 构造 n^2 阶基方阵 A

给定一个 n 阶中心对称幻方 A^* ,从第一行开始由上至下逐行排列成一个 $1 \times n^2$ 的矩阵,称为基本行。以基本行作为基方阵 A 的第 $m + 1$ 行,第 $m + 1$ 行左(或右)移 n 个位置得第 m 行,第 m 行左(或右)移 n 个位置得第 $m - 1$ 行,依次类推直至得到第一行。第 $m + 1$ 行右(或左)移 n 个位置得第 $m + 2$ 行,第 $m + 2$ 行右(或左)移 n 个位置得第 $m + 3$ 行,依次类推直至得到第 n 行,得一个 $n \times n^2$ 矩阵,记为 A^{**} , n 个矩阵 A^{**} 从上到下排列在一起所得就是 n^2 阶基方阵 A 。

显然,第 $1 + t \cdot n$ 行($t = 0, 1, \dots, n-1$)相同,第 $2 + t \cdot n$ 行($t = 0, 1, \dots, n-1$)相同, ..., 第 $n + t \cdot n$ 行($t = 0, 1, \dots, n-1$)相同。

n^2 阶基方阵 A 位于第 $h^* = h + s \cdot n$ 行,第 $k^* = k + t \cdot n$ 列的元素为 $a(h^*, k^*)$,其中 $h, k = 1, 2, \dots, n; s, t = 0, 1, \dots, n-1$ 。

第2步 求基方阵 A 的转置方阵 B

把基方阵 A 的列作为方阵 B 的行,把基方阵 A 的行作为方阵 B 的列,所得方阵 B 就是基方阵 A 的转置方阵。

第3步 基方阵 A 中的元素减1后乘以 n^2 再加上转置方阵 B 的对应元素,所得 n^2 阶方阵记为 Ω ,就是 n^2 阶最完美幻方。不同的 $n(n = 2m + 1, m$ 是自然数)阶中心对称幻方可得不同的 n^2 阶最完美幻方。

3 定理及证明

定理 方阵 Ω 就是一个 n^2 阶最完美幻方。

证明 **第1步** 证明基方阵 A 是一个非正规的 n^2 阶最完美幻方。

1)由基方阵 A 的构造知,其各行是由 n 阶中心对称幻方 A^* 的所有行元素组成,所以其和都等于 $n \cdot \frac{n}{2}(1 + n^2) = \frac{n^2}{2}(1 + n^2)$;其各列由 n 阶中心对称幻方 A^* 某列的元素重复 n 次构成,所以其和都等于 $n \cdot \frac{n}{2}(1 + n^2) = \frac{n^2}{2}(1 + n^2)$ 。

2)因为基本行是中心对称的,由基本行得 $n \times n^2$ 矩阵 A^{**} 过程也是中心对称的,所以矩阵 A^{**} 是中心对称的,从而 n^2 阶基方阵 A 是中心对称的。

3)计算基方阵 A 从左上角到右下角的对角线和泛对角线上所有元素的和。由文献[4]的余函数法,设 $R(x)$ 是周期为 n^2 的余函数, $r(x)$ 是周期为 n 的余函数。

由 $a(f^* + 1, 1)$ 开始的从左上角到右下角的对角线和泛对角线上元素 $a(h^*, k^*)$ 的共性是 $R(h^* - k^*) = f^*$,其中, $h^*, k^* = 1, 2, \dots, n^2, f^* = 0, 1, \dots, n^2 - 1$,不同的 f^* 对应不同的对角线或泛对角线,在求和的过程中 f^* 是固定的。为简单起见, $R(h^* - k^*) = f^*$ 简记为 μ^* ,出于同样的考虑, $r(h - k) = f$ 简记为 μ ,其中, $h, k = 1, 2, \dots, n, f = 0, 1, \dots, n-1$,计算基方阵 A 从左上角到右下角的对角线和泛对角线上所有元素的和为

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k^* = 1, \mu^* \\ k^* = n^2}} a(h^*, k^*) &= \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{t=0, \mu}^{t=n-1} a(h + t \cdot n, k + t \cdot n) \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{t=0, \mu}^{t=n-1} a(h, k + t \cdot n) = n \cdot \frac{n}{2}(1 + n^2) = \frac{n^2}{2}(1 + n^2)。 \end{aligned}$$

由 $a(f^{**}, n^2)$ 开始的从右上角到左下角的对角线和泛对角线上元素 $a(h^*, k^*)$ 的共性是 $R(h^* + k^*) = f^{**}$,其中, $h^*, k^* = 1, 2, \dots, n^2, f^{**} = 0, 1, \dots, n^2$,不同的 f^{**} 对应不同的对角线或泛对角线,在求和的过程中 f^{**} 是固定的。为简单起见, $R(h^* + k^*) = f^{**}$ 简记为 ν^* ,出于同样的考虑, $r(h + k) = \bar{f}$ 简记为 $\nu, h, k = 1, 2, \dots, n, f = 0, 1, \dots, n$,计算基方阵 A 从右上角到左下角的对角线和泛对角线上所有元素的和为

$$\sum_{k^*=1, n^2}^{k^*=n^2} a(h^*, k^*) = \sum_{k=1}^{k=n^2} \sum_{t=0, n^2}^{t=n^2-1} a(h+t \cdot n, k+t \cdot n) \\ = \sum_{k=1}^{k=n^2} \sum_{t=0, n^2}^{t=n^2-1} a(h, k+t \cdot n) = n \cdot \frac{n}{2}(1+n^2) = \frac{n^2}{2}(1+n^2)。$$

综上所述, n^2 阶基方阵 A 是一个幻方常数为 $\frac{n^2}{2}(1+n^2)$ 的非正规对称完美幻方。

4) 证明非正规对称完美幻方 A 满足定义 1。

当 $k=1$ 时, 由基方阵 A 的构造可知, 从任何一点开始向下所取由 n 个元素组成的短列(包括跨边界的短列), 其元素都与 n 阶中心对称幻方 A^* 的某列元素完全相同, 因此其和为 $\frac{n}{2}(1+n^2)^{[5]}$ 。

即在非正规对称完美幻方 A 中任意位置上截取一个 $n \times n$ 方阵(包括跨边界的 $n \times n$ 方阵), 其 n^2 个数的和都等于 $n \cdot \frac{n}{2}(1+n^2) = \frac{n^2}{2}(1+n^2)$, 为 n^2 阶非正规对称完美幻方 A 的幻方常数。

当 $k=2$ 时, 从非正规对称完美幻方 A 中任一点开始向下, 依次取相距 2 个位置的数直至取到第 n 个数, 从 $a(h^*, k^*)(h^*, k^*=1, 2, \dots, n^2)$ (即 $a(R(h^*), R(k^*))$) 开始, 它们依次为

$$a(R(h^*), R(k^*)), a(R(h^*+2), R(k^*)), \dots, a(R(h^*+2(n-1)), R(k^*)),$$

记 $h^* = h + s \cdot n$, 其中, 当 $p=0, 1, \dots, n-1$ 时, 若 h 是奇数, 则 $r(h+2p)$ 依次取 $h, h+2, \dots, n, 2, 4, \dots, n-1$, 取遍 $1 \sim n$ 的所有自然数; 若 h 是偶数, 则 $r(h+2p)$ 依次取 $h, h+2, \dots, n-1, 1, 3, \dots, n$, 取遍 $1 \sim n$ 的所有自然数, 所以

$$\sum_{p=0}^{p=n-1} a(R(h^*+2p), R(k^*)) = \sum_{\bar{p}=1}^{\bar{p}=n} a(\bar{p}, R(k^*)) = \frac{n}{2}(1+n^2)。$$

因而从非正规对称完美幻方 A 中任一点出发, 在同一行中向右依次取相距 2 个位置的数直至取到第 n 个数, 再以这些数为起点在同一列中向下依次取相距 2 个位置的数直至取到第 n 个数, 由这些数组成一个 $n \times n$ 方阵(包括跨边界的 $n \times n$ 方阵), 其 n^2 个数字的和都等于 $n \cdot \frac{n}{2}(1+n^2) = \frac{n^2}{2}(1+n^2)$, 即等于 n^2 阶非正规对称完美幻方 A 的幻方常数。当 k 与 n 互质时, 同理可证依次取相距 k 个位置($k=1, 2, \dots, n$)的数所得 $n \times n$ 方阵结果相同。

当 k 和 n 的最大公因数为 m 时, 令 $k=a \cdot m, n=b \cdot m$, 则 a 和 b 互质。从非正规对称完美幻方 A 中任一点出发, 在同一行中向右依次取相距 k 个位置的数直至取到第 n 个数, 再以这些数为起点在同一列中向下依次取相距 k 个位置的数直至取到第 n 个数, 所得的 $n \times n$ 方阵包括跨边界的 $n \times n$ 方阵。

考察其第 1 行至第 b 行, 由基方阵 A 的构造可知, 相距 $a \cdot n$ 个位置的 m 条短列的元素与基方阵 A 中相应列上由相连 n 个元素组成的短列的元素完全相同, 所以 m 条短列的元素之和都等于 $\frac{n}{2}(1+n^2)$ 。这样的短列有 b 组, 所以这第 1 行至第 b 行元素之和等于 $b \cdot \frac{n}{2}(n^2+1)$, 而整个 $n \times n$ 方阵其 n^2 个数字的和等于 $m \cdot b \cdot \frac{n}{2}(n^2+1) = \frac{n^2}{2}(n^2+1)$ 。

5) 从非正规对称完美幻方 A 中任一点 $a(h^*, k^*)(h^*, k^*=1, 2, \dots, n^2)$ (即 $a(R(h^*), R(k^*))$) 开始向右下方走马步, 马步的轨迹是

$$a(R(h^*), R(k^*)), a(R(h^*+2), R(k^*+1)), \\ a(R(h^*+4), R(k^*+2)), a(R(h^*+2(n^2-1)), R(k^*+(n^2-1))),$$

马步第 n^2 步到达 $a(R(h^*+2n^2), R(k^*+n^2)) = a(R(h^*), R(k^*))$, 即回到起点, 这 n^2 个数的和为

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^{p=n^2-1} a(R(h^*+2p), R(k^*+p)) \\
&= \sum_{\bar{p}=0}^{\bar{p}=n-1} \sum_{p=0}^{p=n-1} a(R(h^*+2\bar{p}+2p \cdot n), R(k^*+\bar{p}+p \cdot n)) \\
&= \sum_{\bar{p}=0}^{\bar{p}=n-1} \sum_{p=0}^{p=n-1} a(R(h^*+2\bar{p}), R(k^*+\bar{p}+p \cdot n)) \\
&= n \cdot \frac{n}{2}(1+n^2) = \frac{n^2}{2}(1+n^2)。
\end{aligned}$$

因而从非正规对称完美幻方 A 中任何一个点出发,按国际象棋中的马步沿右下方向直着走下去,历经 n^2 步必回到出发点,所历经的 n^2 个数字之和都等于非正规对称完美幻方 A 的幻方常数。当沿右下方向横着走下去,结果相同:

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^{p=n^2-1} a(R(h^*+p), R(k^*+2p)) \\
&= \sum_{\bar{p}=0}^{\bar{p}=n-1} \sum_{p=0}^{p=n-1} a(R(h^*+\bar{p}+p \cdot n), R(k^*+2\bar{p}+2p \cdot n)) \\
&= \sum_{\bar{p}=0}^{\bar{p}=n-1} \sum_{p=0}^{p=n-1} a(R(h^*+\bar{p}), R(k^*+2\bar{p}+2p \cdot n)) \\
&= n \cdot \frac{n}{2}(1+n^2) = \frac{n^2}{2}(1+n^2)。
\end{aligned}$$

同理,顺着其他方向走马步结果都相同。

综上所述,基方阵 A 是一个非正规的 n^2 阶最完美幻方。

第2步 显然,基方阵 A 中的元素减1后乘以 n^2 所得方阵是一个非正规的 n^2 阶最完美幻方,转置方阵 B 也是一个非正规的 n^2 阶最完美幻方。基方阵 A 中的元素减1后乘以 n^2 再加上转置方阵 B 的对应元素,所得 n^2 阶方阵 Ω 就是一个非正规的 n^2 阶最完美幻方。

第3步 以基方阵 A 第一行的元素表示其其他元素

$$a(1, k^*) = a(1+p, R(k^*+p \cdot n)),$$

其中, $k^* = 1, 2, \dots, n^2, p = 0, 1, \dots, n^2 - 1$ 。

设转置方阵 B 位于第 h^* 行第 k^* 列的元素为 $b(h^*, k^*)$, 其中 $h^*, k^* = 1, 2, \dots, n^2, a(1+p, R(k^*+p \cdot n))$ 所对应的元素为

$$\begin{aligned}
b(1+p, R(k^*+p \cdot n)) &= a(R(k^*+p \cdot n), 1+p) \\
&= a(k^*, 1+p) \quad p = 0, 1, \dots, n^2 - 1,
\end{aligned}$$

为基方阵 A 位于第 k^* 行的元素,即 $1, 2, \dots, n^2$ 的自然数。

基方阵 A 中的元素减1后乘以 n^2 所得方阵由形如 $p \cdot n^2 (p = 0, 1, \dots, n^2 - 1)$ 的数所组成。基方阵 A 中的元素减1后乘以 n^2 再加上转置方阵 B 的对应元素,所得 n^2 阶方阵 Ω 由形如 $p \cdot n^2 + h^* (p = 0, 1, \dots, n^2 - 1, h^* = 1, 2, \dots, n^2)$ 的数所组成,即由 $1, 2, \dots, n^4$ 的自然数所组成。综上所述,方阵 Ω 是一个正规的 n^2 阶最完美幻方。

由第一步 $n \times n^2$ 矩阵 A^{**} 的安装知,每一个 n 阶中心对称幻方按本文的三步法可产生两个不同的正规的 n^2 阶最完美幻方。根据在文献[4]给出的构造奇数阶对称幻方或奇数阶对称完美幻方的二步法,共可产生 $2^{m+1}(m!)$ 种不同的 $n (n = 2m + 1, m$ 是自然数) 阶对称幻方或对称完美幻方,相应地就可产生 $2^{m+2}(m!)$ 种不同的正规的 n^2 阶最完美幻方。由于存在其他构造奇数阶对称幻方的方法,所以实际上可得到比 $2^{m+1}(m!)$ 更多的正规的 n^2 阶最完美幻方。

例 由5阶对称幻方产生的25阶最完美幻方(见图1、2)。

9	12	20	3	21
18	1	24	7	15
22	10	13	16	4
11	19	2	25	8
5	23	6	14	17

图1 5阶对称幻方

Figure 1 5 order symmetric magic square

547	243	309	380	86	272	468	34	605	186	122	568	134	330	411	222	293	484	55	511	447	18	584	155	361
435	1	587	173	369	535	226	312	398	94	260	451	37	623	194	110	551	137	348	419	210	276	487	73	519
213	299	495	56	502	438	24	595	156	352	538	249	320	381	77	263	474	45	606	177	113	574	145	331	402
116	557	128	339	425	216	282	478	64	525	441	7	578	164	375	541	232	303	389	100	266	457	28	614	200
254	465	46	617	183	104	565	146	342	408	204	290	496	67	508	429	15	596	167	358	529	240	321	392	83
536	247	318	384	80	261	472	43	609	180	111	572	143	334	405	211	297	493	59	505	436	22	593	159	355
444	10	576	162	373	544	235	301	387	98	269	460	26	612	198	119	560	126	337	423	219	285	476	62	523
202	288	499	70	506	427	13	599	170	356	527	238	324	395	81	252	463	49	620	181	102	563	149	345	406
125	566	132	328	414	225	291	482	53	514	450	16	582	153	364	550	241	307	378	89	275	466	32	603	189
258	454	40	621	192	108	554	140	346	417	208	279	490	71	517	433	4	590	171	367	533	229	315	396	92
530	236	322	393	84	255	461	47	618	184	105	561	147	343	409	205	286	497	68	509	430	11	597	168	359
448	19	585	151	362	548	244	310	376	87	273	469	35	601	187	123	569	135	326	412	223	294	485	51	512
206	277	488	74	520	431	2	588	174	370	531	227	313	399	95	256	452	38	624	195	106	552	138	349	420
114	575	141	332	403	214	300	491	57	503	439	25	591	157	353	539	250	316	382	78	264	475	41	607	178
267	458	29	615	196	117	558	129	340	421	217	283	479	65	521	442	8	579	165	371	542	233	304	390	96
534	230	311	397	93	259	455	36	622	193	109	555	136	347	418	209	280	486	72	518	434	5	586	172	368
437	23	594	160	351	537	248	319	385	76	262	473	44	610	176	112	573	144	335	401	212	298	494	60	501
220	281	477	63	524	445	6	577	163	374	545	231	302	388	99	270	456	27	613	199	120	556	127	338	424
103	564	150	341	407	203	289	500	66	507	428	14	600	166	357	528	239	325	391	82	253	464	50	616	182
271	467	33	604	190	121	567	133	329	415	221	292	483	54	515	446	17	583	154	365	546	242	308	379	90
543	234	305	386	97	268	459	30	611	197	118	559	130	336	422	218	284	480	61	522	443	9	580	161	372
426	12	598	169	360	526	237	323	394	85	251	462	48	619	185	101	562	148	344	410	201	287	498	69	510
224	295	481	52	513	449	20	581	152	363	549	245	306	377	88	274	470	31	602	188	124	570	131	327	413
107	553	139	350	416	207	278	489	75	516	432	3	589	175	366	532	228	314	400	91	257	453	39	625	191
265	471	42	608	179	115	571	142	333	404	215	296	492	58	504	440	21	592	158	354	540	246	317	383	79

图2 25阶最完美幻方

Figure 2 25 order most perfect magic square

注:在本文构造法下,普通的非对称幻方也能实现方阵 Ω 除了中心对称性之外的所有特性(完美幻方且满足定义中的性质1、2、3)。还要提及的是,所谓国际象棋的马步是指马步向量为 $(\pm 1, \pm 2)$ 、 $(\pm 2, \pm 1)$ 的8种步伐。实际上,在本文的构造方法下,采取 $(\pm 1, \pm k)$ 、 $(\pm k, \pm 1)$ 的步伐($k = 1, 2, \dots, n-1$),则所历经的 n^2 个数之和均等于 n^2 阶幻方的幻方常数。 n^2 ($n = 2m + 1$, m 是自然数)阶最完美幻方在三维空间上的推广是 n^2 ($n = 2m + 1$, m 是不等于1的自然数)阶空间最完美幻立方,作者已得出其构造方法。

(下转第348页)