第34卷第3期 海南师范大学学报(自然科学版) Vol.34 No.3
2021年9月 Journal of Hainan Normal University(Natural Science) Sept.2021

Doi:10.12051/j.issn.1674-4942.2021.03.002

带奇异系数的McKean-Vlasov随机微分方程解的存在性

李钰静[1], 马 丽[1,2*]
(1. 海南师范大学 数学与统计学院,海南 海口 571158;
2. 海南师范大学 海南省数学研究中心,海南 海口 571158)

摘 要:本文主要研究分布依赖的随机微分方程弱解的存在性问题。利用Zvonkin转换、Krylov估计、Prokhorov定理、Skorokhod表示定理和Hölder不等式等工具,在扩散系数满足弱连续的条件下得到该随机微分方程弱解的存在性,同时研究了二阶抛物偏微分方程在系数几乎处处有界、退化和一致连续的条件下解的正则性。

关键词:分布依赖的随机微分方程;Zvonkin转换;系数退化

中图分类号:O211.65 **文献标志码**:A **文章编号**:1674-4942(2021)03-0256-13

Existence of Solutions for McKean Vlasov Stochastic Differential Equations with Singular Coefficients

LI Yujing[1], MA Li[1,2*]
(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Hainan Normal University*, *Haikou* 571158, *China*;
2. *Hainan Center for Mathematical Research*, *Hainan Normal University*, *Haikou* 571158, *China*)

Abstract: In this paper, we studied the existence of solutions for distribution dependent stochastic differential equation. By means of Zvonkin′s transformation, Krylov′s estimation, Prokhorov′s theorem, Skorokhod′s representation theorem, Hölder inequality and other tools, the existence of weak solutions for the stochastic differential equation was obtained under the condition that the diffusion coefficient satisfies weak continuity. At the same time, we studied the regularity of solutions of second order parabolic partial differential equations under the condition that the coefficients are almost everywhere bounded, degenerate and uniformly continuous.

Keywords: distribution dependent stochastic differential equations; Zvonkin′s transformation; coefficient degradation

设(Ω, F, P)是完备概率空间,$(F_t)_{t\geqslant 0}$是其上满足通常条件的适应流。$P(R^d)$是可测空间$(R^d, B(R^d))$上所有概率测度组成的集合,且赋予弱收敛拓扑。考虑R^d上分布依赖的随机微分方程(也称作McKean-Vlasov随机微分方程):

$$\mathrm{d}X(t) = b(t, X(t), \mu_{X(t)})\mathrm{d}t + \sigma(t, X(t), \mu_{X(t)})\mathrm{d}W(t), \tag{1}$$

其中$b: R_+ \times R^d \times P(R^d) \to R^d$和$\sigma: R_+ \times R^d \times P(R^d) \to R^d \otimes R^d$是Borel可测函数,$W(t)$是带流的概率空间$(\Omega, F, (F_t)_{t\geqslant 0}, P)$上的一个$d$维标准布朗运动,$\mu_{X_t} := P \circ X_t^{-1}$为过程$\{X(t)\}_{t\geqslant 0}$在时刻$t$的分布。

收稿日期:2021-03-30

基金项目:国家自然科学基金项目(11861029);海南省高层次人才项目(120RC589);海南省研究生创新科研项目(Hys2020-325)

第一作者:李钰静(1996—),河南洛阳人,硕士研究生,研究方向为随机微分方程。E-mail:lyj1622141477@163.com

*通信作者:马丽(1979—),河南南阳人,副教授,研究方向为随机微分方程。E-mail:malihnsd@163.com

McKean-Vlasov随机微分方程是系数依赖于分布的随机微分方程,也被称为分布依赖的随机微分方程或者平均场随机微分方程。该模型首先由Vlasov在文献[1]中提出,对于粒子间存在“弱相互作用”的多粒子系统,粒子间的相互作用可以有效地用平均场来刻画。文献[2]提出了用McKean-Vlasov随机微分方程来刻画Boltzmann方程。文献[3]得到McKean-Vlasov随机微分方程解的分布刚好是一类Fokker-Planck偏微分方程的广义解。文献[4]通过非线性Fokker-Planck方程广义解的唯一性得到相应的McKean-Vlasov随机微分方程弱解的唯一性。反之,通过研究McKean-Vlasov随机微分方程解的性质可以研究Fokker-Planck偏微分方程的广义解。本文将研究McKean-Vlasov随机微分方程(1)弱解的存在性。

关于McKean-Vlasov随机微分方程解的存在唯一性,目前的文献基本上是在扩散系数$\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$满足一致椭圆(即非退化)条件下研究的。文献[3]在扩散系数一致非退化、有界、Hölder连续、飘移系数可积的条件下,利用Zvonkin变换,通过偏微分方程解的正则性得到了强解和弱解的存在性,再由逐轨道唯一性得到强解和弱解唯一性。文献[5]考虑了有共同噪声的分布依赖的随机微分方程,在系数有界连续和初值p阶矩存在的条件下得到了弱解的存在唯一性。文献[6]研究了由α平稳过程驱动的随机微分方程,当漂移系数有界可测且关于测度利普希茨连续、关于第一个分量Hölder连续时,得到了弱解的唯一性,再由逐轨道唯一性得到了强解的存在唯一性。当系数不依赖于分布时,文献[7]在随机微分方程的扩散系数一致椭圆和Hölder连续的条件下,利用Zvonkin变换方法,通过偏微分方程解的存在唯一性及最大正则估计,得到随机微分方程解的存在性,再由逐轨道唯一性得到解唯一性。

当扩散系数$\sigma\sigma^{\mathrm{T}}$不满足一致椭圆条件时,目前没有文献研究方程(1)解的存在唯一性。当扩散系数和漂移系数不依赖于分布时,文献[8]给出在非一致椭圆条件下,偏微分方程利普希茨弱解的某些正则性仍成立,然后由Prokhorov定理和Skorokhod表示定理得到弱解的存在性。

因此,本文考虑一般情况下偏微分方程解的正则性从而得到McKean-Vlasov随机微分方程解的存在性。本文对系数的要求如下:

(H_1)扩散系数退化对每个$t,x,\mu \to \sigma(t,x,\mu)$是弱连续的,对所有$t \geqslant 0, x,y \in R^d, \mu \in P(R^d)$,存在$c_0 \geqslant 1$,$\gamma \in (0,1]$使得

$$\sigma(\cdot,\cdot,\mu) \in L^\infty(R_+ \times R^d, R^d), \left\|\sigma(t,x,\mu) - \sigma(t,y,\mu)\right\|_{HS} \leqslant c_0\left|x-y\right|^\gamma,$$

其中$\|\cdot\|_{HS}$表示矩阵希尔伯特-史密特范数。

漂移系数b满足以下两个条件之一。

(H_2)对每个$(t,x,\mu) \to b(t,x,\mu)$是弱连续,对一些$(p,q) \in J_1, \kappa_0 > 0$,

$$\sup_{Z \in S_{toch}} \left\|\left| b^Z \right|\right\|_{\mathcal{L}_q^p(T)} \leqslant \kappa_0 < \infty,$$

其中,$b^X(t,x) = b(t,x,\mu_{X(t)})$,$J_1$和$\|\cdot\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}$分别由式(2)和式(4)定义。

(H_3) $b(t,x,\mu) = \int_{R^d} \bar{b}(t,x,y)\mu(\mathrm{d}y)$,其中$\bar{b}$: $R_+ \times R^d \times R^d \to R$是有界可测函数且存在$h \in \tilde{\mathcal{L}}_q^p(R_+)$,$(p,q) \in (2,\infty)$且$(p,q) \in J_1$,使得$\left|\bar{b}(t,x,\mu)\right| \leqslant h(t,x-y)$。

由文献[3]知(H_3)可以推出(H_2)。

下面给出本文的主要结果。

定理1 在(H_1)、(H_2)或(H_1)、(H_3)条件下,对任意$\nu \in P_\beta(R^d)$,方程(1)存在一个弱解$(\Omega, F, (F_t)_{t \geqslant 0}, P, X, W)$,$P \circ X_0^{-1} = \nu$。

本文内容安排如下:第1节介绍符号和引理;第2节介绍二阶抛物方程解的正则性;第3节给出定理1的证明。本文推广了文献[3]和[7]的结果。

1 符号和定义

设R^d表示d维欧氏空间。$B_r := \{x \in R^d : |x| < r\}$,其中$r > 0$。$S_{toch} := \{(X_t)_{t \geqslant 0}$为$(\Omega, F, P)$上的连续随机过

程}。$P_\theta(R^d):=\{\mu\in P(R^d):\int_{R^d}|x|^\theta\mu(\mathrm{d}x)<\infty\}$。$\Delta:=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$,$\nabla:=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_d})$。设$\rho$为$R^d$上积分为1的光滑函数,$\rho$的支撑包含于单位球,定义$\rho_n(x):=n^d\rho(nx)$,$n\in(0,\infty)$。$C_b^\infty(R^d)$代表$R^d$上任意阶导数连续且有界的函数类。$A\lesssim B$表示$A\leqslant CB$,$A\asymp B$表示$C^{-1}B\leqslant A\leqslant CB$,其中$C$为大于1的常数。设$\chi$是满足如下条件的非负光滑函数,当$|x|\leqslant 1$时,有$\chi(x)=1$,当$|x|\geqslant 2$时,有$\chi(x)=0$。当$r>0$, $z\in R^d$时,定义$\chi_r^z(x):=\chi\left(\frac{x-z}{r}\right)$,$\chi_r(x):=\chi\left(\frac{x}{r}\right)$。对$j=1,2$,定义

$$J_j:=\left\{(p,q)\in(1,\infty):\frac{d}{p}+\frac{2}{q}<j\right\}。\tag{2}$$

定义1.1 对$\alpha\in R$,$p\in(1,\infty)$,定义

$$H^{\alpha,p}:=(\mathrm{I}-\Delta)^{-\alpha/2}(L^p),$$

称之为贝塞尔位势空间,其上的范数定义为$\|f\|_{\alpha,p}:=\left\|(\mathrm{I}-\Delta)^{\alpha/2}\right\|_p$,这里的$\|\cdot\|_p$是$L^p$范数。其中,$(\mathrm{I}-\Delta)^{\alpha/2}f:=\mathcal{F}^{-1}\left(\left(1+|\cdot|^2\right)^{\alpha/2}\mathcal{F}f\right)$,$\mathcal{F}$是傅里叶变换。

固定$r>0$,定义

$$\tilde{H}^{\alpha,p}:=\left\{f\in H_{loc}^{\alpha,p}(R^d)\,\middle|\,|||f|||_{\alpha,p}:=\sup_z\|\chi_r^z f\|_{\alpha,p}<\infty\right\},$$

称之为局部的$H^{\alpha,p}$空间。其中,$H_{loc}^{\alpha,p}(R^d)=\{f:\forall\chi_r^z\in C_0^\infty,\chi_r^z f\in H^{\alpha,p}\}$。

对$T>0$,$p,q\in(1,\infty)$,$\alpha\in R$,定义

$$\mathcal{L}_q^p(T):=L^q([0,T];L^p),\ \mathbb{H}_q^{\alpha,p}(T):=L^q([0,T];H^{\alpha,p}),$$

$\mathbb{H}_q^{\alpha,p}(T)$和$\tilde{\mathbb{H}}_q^{\alpha,p}(T)$上的范数分别定义如下:

$$\|f\|_{\mathbb{H}_q^{\alpha,p}(T)}:=\left(\int_0^T\|f\|_{\alpha,p}^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},\ |||f|||_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{\alpha,p}(T)}:=\sup_{z\in R^d}\|\chi_r^z f\|_{\mathbb{H}_q^{\alpha,p}(T)}。$$

当$q=\infty$,$p\in[1,\infty)$时定义

$$\tilde{\mathcal{L}}_\infty^{p,uni}(T)=\left\{f\in\tilde{\mathcal{L}}_\infty^p(T):\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\left|\left|\left|f(t,\cdot)*\rho_\varepsilon-f(t,\cdot)\right|\right|\right|_p:=\lim_{\varepsilon\to 0}\kappa_T^f(\varepsilon)=0\right\},$$

其中,$(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in(0,1)}$与$\rho_n$定义相同,$\tilde{\mathcal{L}}_\infty^p(T)$的定义见式(5)。

为了简单起见,约定

$$\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T):=\tilde{\mathbb{H}}_q^{0,p}(0,T),\tilde{\mathcal{L}}_q^p:=\bigcap_{T>0}\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T),H^{\infty,p}:=\bigcap_{\alpha>0}H^{\alpha,p},\tilde{\mathbb{H}}_q^{\alpha,p}:=\bigcap_{T>0}\tilde{\mathbb{H}}_q^{\alpha,p}(T),$$

则有

$$\mathcal{L}_T^p(H^{\infty,p})=\left\{(t,x)\in L^q([T,\infty),H^{\infty,p}):t>T\right\},\tag{3}$$

$$|||f|||_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}=|||f|||_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{0,p}(0,T)}=\sup_{z\in R^d}\|\chi_r^z f\|_{\mathbb{H}_q^{0,p}(T)}=\sup_{z\in R^d}\left(\int_0^T\|\chi_r^z f\|_p^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},\tag{4}$$

$$|||f|||_{\tilde{\mathcal{L}}_\infty^p(T)}=|||f|||_{\tilde{\mathbb{H}}_\infty^{0,p}(0,T)}=\sup_{z\in R^d}\|\chi_r^z f\|_{\mathbb{H}_\infty^{0,p}(T)}=\sup_{z\in R^d}\sup_{t\in[0,T]}|\chi_r^z f|_p。\tag{5}$$

定义1.2 设$X\in S_{toch}$,令$p,q\in(1,\infty)$,$T,\kappa>0$,如果对任意$f\in\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)$,有

$$E\left(\int_0^T f(t,X(t))\mathrm{d}t\right)\leqslant\kappa|||f|||_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)},$$

则称随机过程X满足Krylov估计的X的集合。

2 二阶抛物方程在$\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)$空间中解的正则估计

考虑$R_+\times R^d$上的二阶抛物偏微分方程

$$\partial_t u = a^{ij}\partial_i\partial_j u + b^i\partial_i u - \lambda u + f, u(0) = 0, \tag{6}$$

其中，$\lambda \geqslant 0, a(t,x): R_+ \times R^d \to R^d \otimes R^d$和$b(t,x): R_+ \times R^d \to R^d$是Borel可测函数。

$(\mathrm{H_a})$ 设(a^{ij})为正定对称矩阵，对任意$\mu \in P(R^d)$，$\lim_{|x-y| \to 0} \sup_{t \in R_+} \|a(t,x) - a(t,y)\|_{HS} = 0$且

$$a^{ij}(t,\cdot) \in L^\infty(R^d, R^d)。$$

当系数$b = 0$，a满足$(\mathrm{H_a})$且对任意$m \in \mathbb{N}$有$\|\nabla^m a^{ij}\|_\infty < \infty$时，给定$s < t, \lambda \geqslant 0, \varphi, \psi \in C_b^\infty(R^d)$，考虑向前热方程

$$\partial_t u = a^{ij}\partial_{ij} u - \lambda u, u(s) = \varphi \tag{7}$$

和倒向热方程

$$\partial_s w = \lambda w - \partial_{ij}(a^{ij} w), w(t) = \psi。 \tag{8}$$

由文献[9]定理3.2.1知方程(7)和(8)有唯一解，令$u(t)$和$w(s)$分别是方程(7)和(8)的唯一解，定义

$$T_{s,t}\varphi := u(t),\ T_{s,t}^*\psi := w(s),$$

分别带入到方程(7)和(8)，由链式法则得

$$< T_{s,t}\varphi, \psi > = < \varphi, T_{s,t}^*\psi >。 \tag{9}$$

令$u(t,x) := \int_0^t T_{s,t} f(s,x)\mathrm{d}s, w(t,x) := \int_0^t T_{s,t}^* f(s,x)\mathrm{d}t$，$u, w$分别是以下向前方程

$$\partial_t u = a^{ij}\partial_{ij} u - \lambda u + f,\ u(s)\Big|_{t \leqslant 0} = 0 \tag{10}$$

和倒向方程

$$\partial_s w = \lambda w - \partial_{ij}(a^{ij} w) - f,\ w(t)\Big|_{s \geqslant T} = 0 \tag{11}$$

的解。

定理2.1　在$(\mathrm{H_a})$条件下，对任意$(p,q) \in (1,\infty)$，$T > 0$，存在依赖$T, p, q, d, a, \varepsilon, \lambda$的常数$C$，使得对任意$f \in \mathcal{L}_T^q(H^{\infty,p})$，$\lambda \geqslant 0$，有

$$\|\nabla^2 u_\lambda\|_{\mathcal{L}_q^p(T)} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}_q^p(T)} \tag{12}$$

和

$$\|\nabla^2 w_\lambda\|_{\mathbb{H}_q^{-2,p}(T)} \leqslant C\|f\|_{\mathbb{H}_q^{-2,p}(T)}, \tag{13}$$

其中u_λ和w_λ分别是方程(10)和(11)的解，此外，对$\forall \alpha \in \left[0, 2 - \frac{2}{q}\right)$，有

$$\|u_\lambda\|_{\mathbb{H}_\infty^{\alpha,p}(T)} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}_q^p(T)} \tag{14}$$

和

$$\|w_\lambda\|_{\mathbb{H}_\infty^{\alpha-2,p}(T)} \leqslant C\|f\|_{\mathbb{H}_q^{-2,p}(T)}。 \tag{15}$$

证明　(1)当$p < q$时，与文献[7]定理3.3的证明类似，详见附录。

(2)当$p \leqslant q$时，因为式(12)和式(14)的证明与式(13)和式(15)类似，因此只证明式(13)和式(15)。

由Marcinkiewicz插值定理(文献[10]附录B)知，只需要证明对任意$p > 1$和$n \in \mathbb{N}$，

$$\|\nabla^2 w_\lambda\|_{\mathbb{H}_{nq}^{-2,p}(T)} \leqslant C\|f\|_{\mathbb{H}_{nq}^{-2,p}(T)}。 \tag{16}$$

下证式(16)。令ζ_z是支撑包含在球B_δ中的非负光滑函数，且$\int_{R^d} \zeta^p \mathrm{d}x = 1$，其中$\delta > 0$是待定的常数。令

$$\zeta_z(x) := \zeta(x - z), \eta_z(s) := a_z(s) + \varepsilon I, \eta(s) := a(s) + \varepsilon I, a_z(s) := a(z,s),$$

定义

$$w_z(s,z) := w(s,x)\zeta_z(x), f_z(s,x) := f(s,x)\zeta_z(x)。$$

由式(11)两边同时乘上$\zeta_z(x)$可得

$$(\partial_s w)\zeta_z = \lambda w\zeta_z - \zeta_z\partial_{ij}(a^{ij}w) - f\zeta_z,$$

添项去项得

$$\partial_s w_z + \partial_{ij}[(\eta_z^{ij} - \varepsilon I)w_z] - \lambda w_z + f_z + [\partial_{ij}(\eta^{ij}w - \varepsilon w)]\zeta_z - \partial_{ij}[(\eta_z^{ij} - \varepsilon I)w\zeta_z] = 0,$$

即

$$\partial_s w_z + \partial_{ij}(\eta_z^{ij}w_z) - \varepsilon\partial_{ij}w_z - \lambda w_z + f_z + [\partial_{ij}(\eta^{ij}w)]\zeta_z - \varepsilon(\partial_{ij}w)\zeta_z - \partial_{ij}(\eta_z^{ij}w\zeta_z) + \varepsilon[\partial_{ij}(w\zeta_z)] = 0,$$

因此,

$$\partial_s w_z + \partial_{ij}(\eta_z^{ij}w_z) - \lambda w_z + \hbar_z = 0, w_z(T) = 0, \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}\hbar_z &= f_z + [\partial_{ij}(\eta^{ij}w)]\zeta_z - \varepsilon(\partial_{ij}w)\zeta_z - \partial_{ij}(\eta_z^{ij}w\zeta_z) + \varepsilon[\partial_{ij}(w\zeta_z)] - \varepsilon(\partial_{ij}w_z)\\ &= f_z + [\partial_{ij}(\eta^{ij}w)]\zeta_z - \varepsilon(\partial_{ij}w)\zeta_z - \partial_{ij}(\eta_z^{ij}w\zeta_z)。\end{aligned}$$

由链式法则得

$$\partial_{ij}(\eta^{ij}w\zeta_z) = [\partial_{ij}(\eta^{ij}w)]\zeta_z + (\partial_{ij}\zeta_z)\eta^{ij}w + 2\partial_j(\eta^{ij}w)\partial_i\zeta_z,$$

因此,

$$\hbar_z = f\zeta_z - 2\partial_j(\eta^{ij}w)\partial_i\zeta_z - \eta^{ij}w(\partial_{ij}\zeta_z) + \partial_{ij}[(\eta^{ij} - \eta_z^{ij})w\zeta_z] - \varepsilon(\partial_{ij}w)\zeta_z。\tag{18}$$

由文献[11]引理4.1得

$$\begin{aligned}\left(\int_{R^d}\left\|\hbar_z\right\|_{-2,p}^p \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{R^d}\left\|f\zeta_z - 2\partial_j(\eta^{ij}w)\partial_i\zeta_z - \eta^{ij}w(\partial_{ij}\zeta_z) + \partial_{ij}[(\eta^{ij} - \eta_z^{ij})w\zeta_z)] - \varepsilon(\partial_{ij}w)\zeta_z\right\|_{-2,p}^p \mathrm{d}z\right)^{1/p}\\ &\leqslant C\left\|f\right\|_{-2,p} + C_\delta\sum_{i,j}\left\|\partial_j(\eta^{ij}w)\right\|_{-2,p} + C_\delta\sum_{i,j}\left\|\eta^{ij}w\right\|_{-2,p} + w_\eta(\delta)\left\|w\right\|_p + \varepsilon C_\delta\left\|\partial_{ij}w\right\|_{-2,p},\end{aligned}\tag{19}$$

其中

$$w_\eta(\delta) := \sup_{t\geqslant 0}\sup_{|x-y|\leqslant\delta}\left|\eta(t,x) - \eta(t,y)\right|。$$

令$\eta_n(t,x) := \eta(t,\cdot)*\rho_n$,注意到$\eta^{ij}(s) := a^{ij}(s) + \varepsilon I, a^{ij}(t,\cdot) \in L^\infty(R^d, R^d)$,其中$0 < \varepsilon < 1$,类似于文献[7]第9页的证明可得存在$0 < \varepsilon_1 < 1$,使得

$$\sum_{i,j}\left\|\partial_j(\eta^{ij}w)\right\|_{-2,p} + \sum_{i,j}\left\|\eta^{ij}w\right\|_{-2,p} \lesssim \left\|w\right\|_{-2,p} + \varepsilon_1\left\|w\right\|_p, \tag{20}$$

由文献[12]推论11知

$$\left\|\partial_{ij}w\right\|_{-2,p} \lesssim \left\|w\right\|_p, \tag{21}$$

将式(20)和式(21)带入式(19)得

$$\left(\int_{R^d}\left\|\hbar_z\right\|_{-2,p}^p \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \left\|f\right\|_{-2,p} + \left\|w\right\|_{-2,p} + (\varepsilon + \varepsilon_1)\left\|w\right\|_p, \tag{22}$$

与文献[7]定理3.3(iii)的证明类似可得

$$\left\|\nabla^2 w\right\|_{\mathbb{H}_{np}^{-2,p}(S,T)}^{np} \lesssim \left\|f\right\|_{\mathbb{H}_{np}^{-2,p}(S,T)}^{np} + \left\|w\right\|_{\mathbb{H}_{np}^{-2,p}(S,T)}^{np}。\tag{23}$$

令$A_{s,t}^z := \int_s^t \eta_z(r)\mathrm{d}r$,

$$P_{s,t}^z f(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\det(A_{s,t}^z)^{\frac{1}{2}}}\int_{R^d} e^{-\langle (A_{s,t}^z)^{-1}y, y\rangle/2} f(x-y)\mathrm{d}y,$$

则方程(17)的解可写为

$$w_z(s,x) = \int_s^T e^{\lambda(s-t)}P_{s,t}^z\hbar_z(t,x)\mathrm{d}t。$$

由$\eta_z(s)$的定义和($\mathrm{H_a}$)条件知$\eta_z(s) \geqslant \varepsilon > 0$,并由文献[12]定理13.3.10得对任意$\alpha \in [0,2)$,存在常数$C = C(\alpha, d, p, c, T, \lambda) > 0$,使得对所有$z \in R^d$,

$$
\begin{aligned}
\left\|w_z(s,x)\right\|_{\alpha-2,p} &= \left\|\int_s^T e^{\lambda(s-t)} P_{s,t}^z \hbar_z(t,x)\,\mathrm{d}t\right\|_{\alpha-2,p} \\
&= \left\|\int_s^T e^{\lambda(s-t)} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\det(A_{s,t}^z)^{1/2}} \int_{R^d} e^{-<((A_{s,t}^z)^{-1}y,y)>/2} \hbar_z(t,x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\right\|_{\alpha-2,p} \\
&\lesssim \int_s^T e^{\lambda(s-t)} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\det(A_{s,t}^z)^{1/2}} \int_{R^d} e^{-<((A_{s,t}^z)^{-1}y,y)>/2} \left\|\hbar_z(t,x-y)\right\|_{\alpha-2,p}\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_s^T e^{\lambda(s-t)} \left\|\hbar_z(t)\right\|_{-2,p}\mathrm{d}t \\
&\lesssim \int_s^T \left\|\hbar_z(t)\right\|_{-2,p}\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

因此,由文献[11]引理4.1和文献[12]推论13.3.11得,对任意$\alpha\in[0,2)$,存在常数$N>0$,有

$$
\begin{aligned}
\left\|w(s)\right\|_{\alpha-2,p} &\lesssim \left(\int_{R^d}\left\|w_z(s)\right\|_{\alpha-2,p}^p \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \int_s^T \int_{R^d}\left(\left\|\hbar_z(t)\right\|_{-2,p}^p \mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t \\
&\lesssim \int_s^T\left(\left\|f(t)\right\|_{-2,p} + \left\|w(t)\right\|_{-2,p} + (\varepsilon+\varepsilon_1)\left\|w(t)\right\|_p\right)\mathrm{d}t \\
&\lesssim \int_s^T\left(\left\|f(t)\right\|_{-2,p} + \left\|w(t)\right\|_{-2,p} + N(\varepsilon+\varepsilon_1)\left\|\nabla^2 w(t)\right\|_{-2,p}\right)\mathrm{d}t \\
&\lesssim \int_s^T\left(\left\|f(t)\right\|_{-2,p} + \left\|w(t)\right\|_{-2,p} + \left\|\nabla^2 w(t)\right\|_{-2,p}\right)\mathrm{d}t。
\end{aligned} \tag{24}
$$

在式(23)和式(24)中分别取$\alpha=0$,$n=1$,可得

$$
\left\|w(s)\right\|_{\alpha-2,p}^p \lesssim \int_s^T\left(\left\|f(t)\right\|_{-2,p}^p + \left\|w(t)\right\|_{-2,p}^p + \left\|\nabla^2 w\right\|_{-2,p}^p\right)\mathrm{d}t \lesssim \int_s^T\left(\left\|f(t)\right\|_{-2,p}^p + \left\|w(t)\right\|_{-2,p}^p\right)\mathrm{d}t,
$$

由Gronwall不等式知

$$
\left\|w\right\|_{\mathbb{H}_\infty^{-2,p}(T)}^p = \sup_{s\in[0,T]}\left\|w(s)\right\|_{-2,p}^p \lesssim \left\|f\right\|_{\mathbb{H}_p^{-2,p}(T)}^p \lesssim \left\|f\right\|_{\mathbb{H}_{np}^{-2,p}(T)}^p,
$$

又$\left\|w\right\|_{\mathbb{H}_{np}^{-2,p}(T)} \lesssim \left\|w\right\|_{\mathbb{H}_\infty^{-2,p}(T)}$,因此式(16)得证。

利用式(24)和Hölder不等式得

$$
\begin{aligned}
\left\|w(s)\right\|_{\alpha-2,p}^q &\lesssim \int_s^T\left(\left\|f(t)\right\|_{-2,p} + \left\|w(t)\right\|_{-2,p} + \left\|\nabla^2 w\right\|_{-2,p}\right)^q \mathrm{d}t \\
&\lesssim \int_s^T\left(\left\|f(t)\right\|_{-2,p}^q + \left\|w(t)\right\|_{-2,p}^q + \left\|\nabla^2 w\right\|_{-2,p}^q\right)\mathrm{d}t \\
&\lesssim \left\|f\right\|_{\mathbb{H}_p^{-2,p}(T)}^q + \int_s^T\left\|w(t)\right\|_{-2,p}^q\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

取$\alpha=0$,由Gronwall不等式得

$$
\left\|w\right\|_{\mathbb{H}_\infty^{-2,p}(T)}^q = \sup_{s\in[0,T]}\left\|w(s)\right\|_{-2,p}^q \lesssim \left\|f\right\|_{\mathbb{H}_q^{-2,p}(T)}^q。
$$

证毕。

定理2.2　令$(p,q)\in(1,\infty)$,假设($\mathrm{H_a}$)成立,若$\dfrac{d}{p}+\dfrac{2}{q}<1$,$T>0$,有$|||b|||_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}\leqslant\kappa_T^b<\infty$,则对任意$f\in\tilde{\mathcal{L}}_q^p$,$\lambda\geqslant1$,方程(6)有唯一强解$u\in\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}$,即对任意$t\geqslant0$,$x\in R^d$,有

$$
u(t,x) = \int_0^t (a^{ij}\partial_i\partial_j)u(s,x)\mathrm{d}s + \int_0^t (b^i\partial_i u)(s,x)\mathrm{d}s - \lambda\int_0^t u(s,x)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s,x)\mathrm{d}s。
$$

此外,对任意$T>0$,$\alpha\in\left[0,2-\dfrac{2}{q}\right)$,存在依赖$\alpha,p,q,d,T,c_0,\kappa_T^b$的常数$C>0$,使得对任意$\lambda\geqslant1$,有

$$
\lambda^{1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q}}|||u|||_{\tilde{\mathbb{H}}_\infty^{\alpha,p}(T)} + |||\partial_t u|||_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)} + |||u|||_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}(T)} \leqslant C|||f|||_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}。 \tag{25}
$$

证明的方法与文献[7]定理3.1的类似,详见附录。

注:该定理考虑了系数α在非一致椭圆(即退化)条件下,得到二阶抛物方程解的正则估计,从而推广了文献[7]的结论。

3 主要结果及其证明

在证明定理1之前,需要以下引理。

引理3.1 在(H_1)、(H_2)或(H_1)、(H_3)条件下,对任意$\mu \in P_\beta(R^d)$, $Z \in S_{toch}$,方程$\mathrm{d}X(t) = b^Z(t, X(t))\mathrm{d}t + \sigma^Z(t, X(t))\mathrm{d}W(t)$, $P \circ X_0^{-1} = \nu$有唯一弱解$(\Omega, F, (F_t)_{t \geqslant 0}, P, X, W)$。此外令$\Theta = (d, p, q, C_0, \gamma, \kappa_0, \beta)$,则

(1)对任意$T > 0$,存在$C_1 = C_1(\Theta, T) > 0$, 使得

$$E\left(\sup_{t \in [0,T]} \left|X(t)\right|^\beta\right) \leqslant C_1\left(E\left|X(0)\right|^\beta + 1\right), \tag{26}$$

对任意$\delta < T$,有

$$E\left(\sup_{t \in [0,T-\delta]} \left|X(t+\delta) - X(t)\right|^\beta\right) \leqslant C_1 \delta^\beta。 \tag{27}$$

(2)对任意$(p_1, q_1) \in J_1$, $T > 0$,存在$C_2 = C_2(p_1, q_1, \Theta, T) > 0$,使得对所有$0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$, $f \in \tilde{L}_{q_1}^{p_1}(t_0, t_1)$,有

$$E\left(\int_{t_0}^{t_1} f(s, X(s))\mathrm{d}s \middle| F_{t_0}\right) \leqslant C_2 \left\|\left|f\right|\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_{q_1}^{p_1}(t_0,t_1)}。 \tag{28}$$

证明 利用Zvonkin转换去掉漂移项b^Z。令$\lambda, T > 0$,考虑倒向偏微分方程

$$\partial_t u + (\ell_t^{\sigma^Z} - \lambda)u + b^Z \cdot \nabla u + b^Z = 0, u(T, x) = 0, \tag{29}$$

其中

$$\ell_t^{\sigma^Z} u(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^d (\sigma_t^{jk}\sigma_t^{ik})(x, \mu_{Z_t})\partial_i\partial_j u(x)。$$

设$a^{ij} := \frac{1}{2}\sigma^{jk}\sigma^{ik}$,由$(H_1)$知$\left\|a^{ij}(t, \cdot)\right\|_\infty = \left\|\frac{1}{2}\sigma_t^{jk}\sigma_t^{ik}\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}\left\|(\sigma_t^{jk})^2\right\|_\infty + \frac{1}{4}\left\|(\sigma_t^{ik})^2\right\|_\infty < \infty$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{|x-y| \to 0}\sup_{t \in R_+}\left\|\frac{1}{2}\left(\sigma^{jk}\sigma^{ik}(t, x, \mu) - \sigma^{jk}\sigma^{ik}(t, y, \mu)\right)\right\|_{HS} \\
&\leqslant \lim_{|x-y| \to 0}\sup_{t \in R_+}\frac{1}{2}\left\|\left(\sigma^{ik}(t, x, \mu) - \sigma^{ik}(t, y, \mu)\right)\right\|_{HS}^2 \\
&\leqslant \lim_{|x-y| \to 0}\frac{1}{2}c_0\left|x - y\right|^{2\gamma} = 0,
\end{aligned}$$

得(H_a)成立。所以在第三节得到的结果在此小节中可以使用。由(H_2)及定理2.2得,式(29)有唯一解$u \in \tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}$,且对任意$\alpha \in \left[0, 2 - \frac{2}{q}\right)$,存在一个常数$c_1 = c_1(\alpha, \Theta, T) > 0$,使得对所有$\lambda \geqslant 1$,

$$\lambda^{1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{q}}\left\|\left|u\right|\right\|_{\tilde{\mathbb{H}}_\infty^{\alpha,p}(T)} + \left\|\left|u\right|\right\|_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}(T)} \leqslant C\left\|\left|b^Z\right|\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}, \tag{30}$$

特别地,因为$\frac{d}{p} + \frac{2}{q} < 1$,由Sobolev嵌入,可选足够大的$\lambda$,使得

$$\left\|u\right\|_{\mathcal{L}^\infty(T)} + \left\|\nabla u\right\|_{\mathcal{L}^\infty(T)} \leqslant \frac{1}{2}。 \tag{31}$$

定义$\Phi(t, x) := x + u(t, x)$,由中值定理得

$$\frac{\left|x - y\right|}{2} \leqslant \left|\Phi(t, x) - \Phi(t, y)\right| \leqslant 2\left|x - y\right|, \tag{32}$$

由链式法则易得

$$\partial_t\Phi + \ell_t^{\sigma^Z}\Phi + b^Z\cdot\nabla\Phi = \lambda u = \partial_t u + \ell_t^{\sigma^Z}u + b^Z\cdot\nabla u + b^Z。\tag{33}$$

由广义的伊藤公式(文献[11]引理3.6)和式(33),有

$$\begin{aligned} Y(t) := \Phi(t,X(t)) &= \Phi(0,X(0)) + \lambda\int_0^t u(s,X(s))\mathrm{d}s + \int_0^t (\sigma^Z(s,X(s))\cdot\nabla\Phi(s,X(s))\,\mathrm{d}W(s)\\ &= \Phi(0,X(0)) + \int_0^t \tilde{b}(s,Y(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \tilde{\sigma}(s,Y(s))\,\mathrm{d}W(s), \end{aligned}\tag{34}$$

其中,$\tilde{\sigma} := (\sigma^Z\cdot\nabla\Phi)\circ\Phi^{-1}$, $\tilde{b} := \lambda u\circ\Phi^{-1}$。

由式(32)得

$$\frac{\left|\Phi^{-1}(\Phi(t,x)) - \Phi^{-1}(\Phi(t,y))\right|}{2} \leqslant \left|\Phi(t,x) - \Phi(t,y)\right| \leqslant 2\left|\Phi^{-1}(\Phi(t,x)) - \Phi^{-1}(\Phi(t,y))\right|,$$

令$\Phi(t,x) = u, \Phi(t,y) = v$,得

$$\frac{|u-v|}{2} \leqslant \left|\Phi_t^{-1}(u) - \Phi_t^{-1}(v)\right| \leqslant 2|u-v|,\tag{35}$$

由式(32)、式(35)和(H_1)得

$$\|\tilde{\sigma}\|_\infty = \left\|(\sigma^Z\cdot\nabla\Phi)\circ\Phi^{-1}\right\|_\infty = \left\|\sigma^Z(\Phi^{-1})\cdot\nabla\Phi(\Phi^{-1})\right\|_\infty \leqslant 2\left\|\sigma^Z(\Phi^{-1})\right\|_\infty < C,$$

$$\begin{aligned} \left\|\tilde{\sigma}(x) - \tilde{\sigma}(y)\right\|_{HS} &= \left\|(\sigma^Z\cdot\nabla\Phi)\circ\Phi^{-1}(x) - (\sigma^Z\cdot\nabla\Phi)\circ\Phi^{-1}(y)\right\|_{HS}\\ &= \left\|(\sigma^Z(\Phi^{-1}(x)) - \sigma^Z(\Phi^{-1}(y)))\cdot\nabla\Phi(\Phi^{-1}(x))\right.\\ &\quad \left.+ \sigma^Z(\Phi^{-1}(y))\cdot(\nabla\Phi(\Phi^{-1}(x)) - \nabla\Phi(\Phi^{-1}(y)))\right\|_{HS}\\ &\leqslant c_0\left\|\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(y)\right\|^\gamma < c_0\left|x-y\right|^\gamma, \end{aligned}$$

由式(31)和$\tilde{b}$定义易得

$$\left\|\tilde{b}\right\|_{\mathcal{L}^\infty(T)} + \left\|\nabla\tilde{b}\right\|_{\mathcal{L}^\infty(T)} \leqslant 4\lambda,\tag{36}$$

综上,得

$$\tilde{\sigma}(\cdot,\cdot,\mu) \in L^\infty(R_+\times R^d, R^d)\ ,\ \left\|\tilde{\sigma}(t,x,\mu) - \tilde{\sigma}(t,y,\mu)\right\|_{HS} \leqslant c_0\left|x-y\right|^\gamma,\ \left\|\tilde{b}\right\|_{\mathcal{L}^\infty(T)} + \left\|\nabla\tilde{b}\right\|_{\mathcal{L}^\infty(T)} \leqslant 4\lambda。$$

由文献[9]定理5.1.1得方程(34)存在唯一弱解。

设$\beta > 0$,式(26)由BDG不等式即得

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|Y(t)\right|^\beta\right) &= E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\Phi(0,X(0)) + \int_0^t\tilde{b}(s,Y(s))\mathrm{d}s + \int_0^t\tilde{\sigma}(s,Y(s))\,\mathrm{d}W(s)\right|\right)\\ &\lesssim E\left|\Phi(0,X(0))\right|^\beta + E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\tilde{b}(s,Y(s))\mathrm{d}s\right|^\beta\right) + E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\tilde{\sigma}^2(s,Y(s))\,\mathrm{d}s\right|^{\frac{\beta}{2}}\right)\\ &\lesssim E\left|\Phi(0,X(0))\right|^\beta + \left\|\tilde{b}\right\|^\beta_{\mathcal{L}^\infty(T)}T^\beta + \|\tilde{\sigma}\|^\beta_{\mathcal{L}^\infty(T)}T^{\frac{\beta}{2}}\\ &\lesssim C_1\left(1 + E\left|\Phi(0,X(0))\right|^\beta\right)。 \end{aligned}$$

式(28)与文献[13]定理2.1的证明类似,详见附录。由式(32)和BDG不等式得

$$\begin{aligned} E\left(\left|Y(\delta+\tau) - Y(\tau)\right|^\beta\right) &\lesssim E\left(\left|\int_\tau^{\tau+\delta}\tilde{b}(s,Y(s))\mathrm{d}s\right|^\beta\right) + E\left(\left|\int_\tau^{\tau+\delta}\tilde{\sigma}^2(s,Y(s))\,\mathrm{d}s\right|^{\frac{\beta}{2}}\right)\\ &\lesssim \left\|\tilde{b}\right\|^\beta_{\mathcal{L}^\infty(T)}\delta^\beta + \|\tilde{\sigma}\|^\beta_{\mathcal{L}^\infty(T)}\delta^{\frac{\beta}{2}}\\ &\lesssim C_1\delta^\beta, \end{aligned}$$

然后由文献[14]引理2.7和式(32)得式(27)。

下面给出定理1的证明。

定理1的证明 设$X_t^0 \equiv X_0$,对$n \in \mathbb{N}$考虑随机微分方程

$$X^n(t) = X^n(0) + \int_0^t b^n(s, X^n(s), \mu_{X^n(s)})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma^n(s, X^n(s), \mu_{X^n(s)})\mathrm{d}W(s), \tag{37}$$

其中,

$$b^n(s,x,\mu) := (-n) \vee b(s,x,\mu) \wedge n,\ \sigma^n(s,x,\mu) := (-n) \vee \sigma(s,x,\mu) \wedge n,$$

在条件(H_3)下,$b^n(t,x,\mu) = \int_{R^d} \bar{b}^n(t,x,y)\mu(\mathrm{d}y)$,其中$\bar{b}^n(s,x,\mu) := (-n) \vee \bar{b}(s,x,\mu) \wedge n$。

因为b^n有界可测,由文献[15]定理1.2知式(37)存在一个弱解$(\Omega, F, (F_t)_{t \geqslant 0}, P, X^n, W)$,其中$P \circ (X_0^n)^{-1} = \nu$。由($H_2$)知

$$\sup_{Z \in S_{toch}} \left\|\left| b^{n,Z} \right\|\right|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)} \leqslant \sup_{Z \in S_{toch}} \left\|\left| b^Z \right\|\right|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)} \leqslant \kappa_0,$$

所以由引理3.1知,$X^n(t)$满足式(26)、(27)和(28)。

由式(26)可得,(X^n, W^n)的分布$\mathbb{Q}^n$是胎紧的,令$\mathbb{Q}$是$\mathbb{Q}^n$的极限点。设$\mathbb{Q}^n$弱收敛到$\mathbb{Q}$,则由Skorokhod表示定理,存在概率空间$\left(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P}\right)$和其上的$\left(\tilde{X}^n, \tilde{W}^n\right)$和$\left(\tilde{X}, \tilde{W}\right)$使得

$$\left(\tilde{X}^n, \tilde{W}^n\right) \to \left(\tilde{X}, \tilde{W}\right), \qquad \tilde{P} - a.s. \tag{38}$$

和

$$\tilde{P} \circ \left(\tilde{X}^n, \tilde{W}^n\right)^{-1} = \mathbb{Q}^n = \tilde{P} \circ \left(\tilde{X}^n, \tilde{W}\right)^{-1}, \qquad \tilde{P} \circ \left(\tilde{X}, \tilde{W}\right)^{-1} = \mathbb{Q}。 \tag{39}$$

定义$\tilde{F}_t^n := \sigma\left(\tilde{W}_s^n, \tilde{X}_s^n; s \leqslant t\right)$,则有

$$P\left(W_t - W_s \in \cdot \middle| F_s\right) = P\left(W_t - W_s \in \cdot\right) \Rightarrow \tilde{P}\left(\tilde{W}_t^n - \tilde{W}_s^n \in \cdot \middle| \tilde{F}^n{}_s\right) = \tilde{P}\left(\tilde{W}_t^n - \tilde{W}_s^n \in \cdot\right),$$

即$\tilde{W}_t^n$是$\tilde{F}_t^n$布朗运动。因此,由(37)和(39)得

$$\tilde{X}^n(t) = \tilde{X}^n(0) + \int_0^t b^n(s, \tilde{X}^n(s), \mu_{\tilde{X}^n(s)})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma^n(s, \tilde{X}^n(s), \mu_{\tilde{X}^n(s)})\mathrm{d}\tilde{W}^n(s)。$$

由文献[3]知条件(H_3)可以推出(H_2)。因此当漂移系数b满足)条件(H_3)时,由式(28)和定义1.2知对任意$(p_1, q_1) \in J_2$,存在$\kappa > 0$使得对任意$n \in \mathbb{N}$,有$\tilde{X}^n \in K_{T,\kappa}^{p_1,q_1}$,因为$\left|\bar{b}(t,x,\mu)\right| \leqslant h(t, x-y)$,其中$h \in L_{loc}^q(R_+; \tilde{L}^p(R^d)) \subset \tilde{\mathcal{L}}_q^p$,$(p,q) \in J_1$,选择$\gamma > 1$使得$\frac{d\gamma}{p} + \frac{\gamma}{q} < 1$成立。取$p_1 = p_2 = \frac{p}{\gamma}$,$q_0 = \frac{q}{\gamma}$,$q_1 = q_2 = \frac{2q}{q+\gamma}$,易得

$$\bar{b} \in \tilde{\mathcal{L}}_q^{p,\infty} = \tilde{\mathcal{L}}_{\gamma q_0}^{\gamma p_1,\infty} \subset \bigcap_{p' \geqslant 1} \tilde{\mathcal{L}}_{\gamma q_0}^{\gamma p_1, p'},$$

因此,漂移系数b满足文献[3]引理2.9的条件。由文献[3]引理2.9和其证明过程得

$$\lim_{n \to \infty} E\left(\int_0^t \left| b(s, \tilde{X}^n(s), \mu_{\tilde{X}^n(s)}) - b(s, \tilde{X}(s), \mu_{\tilde{X}(s)}) \right| \mathrm{d}s\right) = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_n E\left(\int_0^t \left| \bar{b}^m(s, \tilde{X}^n(s), \tilde{Y}^n(s)) - \bar{b}(s, \tilde{X}^n(s), \tilde{Y}^n(s)) \right| \mathrm{d}s\right) = 0,$$

其中$\tilde{Y}^n(s)$是$\tilde{X}^n(s)$的独立复制。由式(38)、文献[3]引理2.8、2.9及文献[16]定理6.22知,当$n \to \infty$时,

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}(0) + \int_0^t b(s, \tilde{X}(s), \mu_{\tilde{X}(s)})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, \tilde{X}(s), \mu_{\tilde{X}(s)})\mathrm{d}\tilde{W}(s)。$$

证毕。

4 附录

当$q < p$时定理2.1的证明

设$r = \frac{p}{p-1} < \theta = \frac{q}{q-1}$,由式(9)和Hölder不等式得

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^2 w\|_{\mathcal{L}_q^p(T)} &= \sup_{g\in L_T^\infty(C_c^\infty),\|g\|_{\mathcal{L}_{\theta}^{r}(T)}\leqslant 1} \int_0^T\int_{R^d}\left(\int_0^t T_{s,t}f(s,x)\mathrm{d}s\right)\nabla^2 g(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \sup_{g\in L_T^\infty(C_c^\infty),\|g\|_{\mathcal{L}_{\theta}^{r}(T)}\leqslant 1} \int_0^T\int_0^t\left(\int_{R^d} T_{s,t}f(s,x)\nabla^2 g(t,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \sup_{g\in L_T^\infty(C_c^\infty),\|g\|_{\mathcal{L}_{\theta}^{r}(T)}\leqslant 1} \int_0^T\int_0^t\left(\int_{R^d} f(s,x)T_{s,t}^*\nabla^2 g(t,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \sup_{g\in L_T^\infty(C_c^\infty),\|g\|_{\mathcal{L}_{\theta}^{r}(T)}\leqslant 1} \int_0^T\int_{R^d} f(s,x)\left(\int_s^T T_{s,t}^*\nabla^2 g(t,x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\sup_{g\in L_T^\infty(C_c^\infty),\|g\|_{\mathcal{L}_{\theta}^{r}(T)}\leqslant 1} \|f\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}\|\nabla^2 g\|_{\mathbb{H}_{\theta}^{-2,p}(T)} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}。
\end{aligned}
$$

证毕。

定理2.2证明　由标准连续方法[17]知，只需证明先验估计式(25)即可。下面将分为三步进行证明。

(1)$(b=0)$ 对 $T>0$，$(p,q)\in(1,\infty)$，设 $f\in\mathcal{L}_q^p(T)$，$u\in\mathbb{H}_q^{2,p}(T)$ 满足方程(6)。定义

$$u_n(t,x):=u(t,\cdot)*\rho_n(x),\ a_n(t,x)=a(t,\cdot)*\rho_n(x),f_n(t,x)=f(t,\cdot)*\rho_n(x),$$

将其带入到方程(6)得

$$\partial_t u_n = a_n^{ij}\partial_{ij}u_n-\lambda u_n+g_n,$$

其中

$$g_n:=f_n+(a^{ij}\partial_{ij}u)*\rho_n-a^{ij}\partial_{ij}u_n,$$

因为 a_n 满足$(\mathrm{H_a})$，$g_n\in\mathcal{L}_T^p(H^{\infty,p})$，由定理2.1可得对任意 $\alpha\in[0,2-\dfrac{2}{q})$，存在 $C>0$，使得对每一个 $n\in\mathbb{N}$，$\lambda\geqslant 1$，有

$$
\begin{aligned}
&\lambda^{1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q}}\|u_n\|_{\mathbb{H}_\infty^{\alpha,p}(T)}+\|\partial_t u_n\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}+\|\nabla^2 u_n\|_{\mathbb{H}_q^{2,p}(T)} \\
&\leqslant C(\|f_n\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}+\|(a^{ij}\partial_{ij}u)*\rho_n-a^{ij}\partial_{ij}u_n\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}),
\end{aligned}
$$

令 $n\to\infty$，由卷积的性质得

$$\lambda^{1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q}}\|u\|_{\mathbb{H}_\infty^{\alpha,p}(T)}+\|\partial_t u\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}+\|\nabla^2 u\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}_q^p(T)},\tag{40}$$

在方程(6)两边同时乘上 χ_r^z 得

$$\partial_t(u\chi_r^z)=a^{ij}\partial_{ij}(u\chi_r^z)-\lambda u\chi_r^z+g_r^z,$$

其中

$$g_r^z:=f\chi_r^z+\chi_r^z a^{ij}\partial_{ij}u-a^{ij}\partial_{ij}(u\chi_r^z),$$

对任意 $\alpha\in[0,2-\dfrac{2}{q})$，由式(40)得

$$\lambda^{1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q}}\|u\chi_r^z\|_{\mathbb{H}_\infty^{\alpha,p}(T)}+\|\partial_t u\chi_r^z\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}+\|\nabla^2(u\chi_r^z)\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}\lesssim\|g_r^z\|_{\mathcal{L}_q^p(T)},$$

用链式法则，对 $a^{ij}\partial_{ij}(u\chi_r^z)$ 求导得

$$a^{ij}\partial_{ij}(u\chi_r^z)-a^{ij}\chi_r^z\partial_{ij}u=a^{ij}u\partial_{ij}\chi_r^z+2a^{ij}\partial_i u\partial_j\chi_r^z,$$

有

$$\|g_r^z\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}\lesssim\|f\chi_r^z\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}+\|u\chi_{2r}^z\|_{\mathcal{L}_q^p(T)}+\|\nabla u\cdot\chi_{2r}^z\|_{\mathcal{L}_q^p(T)},$$

因此，对任意 $\alpha\in\left[0,2-\dfrac{2}{q}\right)$ 和 $\varepsilon_2\in(0,1)$，和任意 $r,r'>0$，有 $\sup_{z\in R^d}\|f\chi_r^z\|_{\mathbb{H}_q^{\alpha,p}(T)}\asymp\sup_{z\in R^d}\|f\chi_{r'}^z\|_{\mathbb{H}_q^{\alpha,p}(T)}$，在 $z\in R^d$ 上取上确界，对任意 $\lambda\leqslant 1$ 有

$$\lambda^{1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q}}\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_\infty^{\alpha,p}(T)}+\|\partial_t u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}(T)}\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\|u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{1,p}(T)}$$
$$\leqslant\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\|u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\varepsilon_2\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}(T)},$$

取$\varepsilon_2=\frac{1}{2}$,有

$$\lambda^{1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q}}\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_\infty^{\alpha,p}(T)}+\|\partial_t u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}(T)}\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\|u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)},$$

特别地,取$\alpha=0$,有

$$\|u(T)\|_p\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\left(\int_0^T\|u\|_p^q\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q}},$$

由Gronwall不等式得

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_\infty^p(T)}\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)},$$

因此对任意$\alpha\in\left[0,2-\frac{2}{q}\right)$,有

$$\lambda^{1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q}}\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_\infty^{\alpha,p}(T)}+\|\partial_t u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}(T)}\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}。\tag{41}$$

(2)($b\neq0$)设由$\lambda\geqslant1,q_1\in\left(\frac{2p}{p-d},q\right]$,则对任意$\alpha\in\left[0,2-\frac{2}{q}\right)$,有

$$\begin{aligned}\lambda^{1-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{q}}\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_\infty^{\alpha,p}(T)}+\|\partial_t u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}+\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}(T)}&\lesssim\|f+b^i\partial_i u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_{q_1}^p(T)}\\&\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_{q_1}^p(T)}+\|b^i\partial_i u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_{q_1}^p(T)}。\end{aligned}\tag{42}$$

设$\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}$,由Hölder不等式和Sobolev嵌入不等式得对任意$\theta\in\left(\frac{d}{p},1-\frac{2}{q_1}\right)$,有

$$\|b^i\partial_i u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_{q_1}^p(T)}\leqslant\|b\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)}\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_{q_2}^{1,\infty}(T)}\lesssim\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_{q_2}^{1+\theta,p}(T)},$$

对上式取$\alpha=1+\theta$,带入式(42)中得

$$\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q_1}}\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_\infty^{1+\theta,p}(T)}\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_{q_1}^p(T)}+\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_{q_2}^{1+\theta,p}(T)},$$

特别地,若$q_1<q$,那么有$q_2<\infty$,由Gronwall不等式得

$$\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_\infty^{1+\theta,p}(T)}\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_{q_1}^p(T)}\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T)},$$

综上得出式(25)。

式(28)证明

令$r=d+1$,因为$\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T_0)\cap\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T_0)$在$\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T_0)$中稠密。下证当$f\in\tilde{\mathcal{L}}_q^p(T_0)\cap\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T_0)$时,式(28)成立。固定$T\in[0,T_0]$,由文献[3]定理2.2知

$$\partial_t u+\ell_t^{\sigma^Z}u+b^Z\cdot\nabla u+b^Z=f,\ u(T,x)=0$$

有唯一弱解$u\in\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}\cap\tilde{\mathbb{H}}_r^{2,r}$。此外有对任意$S\in[0,T]$,$\alpha\in\left[0,2-\frac{2}{q}\right)$,存在一个依赖$\alpha,p,d,T,c_0,\kappa_T^b,\kappa_T^b(\varepsilon)$的正常数$C$,使得

$$\|\partial_t u\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(S,T)}+\|u\|_{\tilde{\mathbb{H}}_q^{2,p}(S,T)}\lesssim\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(S,T)}\tag{43}$$

和

$$\left|\left\|\partial_t u\right\|\right|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(S,T)}+\left|\left\|u\right\|\right|_{\tilde{\mathbb{H}}_r^{2,r}(S,T)}\lesssim\left|\left\|f\right\|\right|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(S,T)},\tag{44}$$

特别地,有

$$\sup_{(t,x)\in[S,T]\times R^d}\left|u(t,x)\right|\lesssim\left|\left\|f\right\|\right|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(S,T)}。\tag{45}$$

设ρ为R^{d+1}上积分为1的光滑函数,ρ的支撑包含于单位球,$\rho_n(t,x):=n^{d+1}\rho(nt,nx)$,设当$S\leqslant T$时,$u(s,\cdot)=0$,$s\leqslant 0$时,$u(s,\cdot)=u(0,\cdot)$,定义

$$u_n(t,x):=\int_{R^{d+1}}u(s,y)\rho_n(t-s,x-y)\mathrm{d}s\mathrm{d}y,$$

和

$$f_n(t,x):=\partial_t u_n+\ell_t^{\sigma^Z}u_n+b^Z\cdot\nabla u_n,$$

因此,由式(43)、(44)和卷积的性质,有

$$\begin{aligned}\left\|f_n-f\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T)}&\leqslant\left\|\partial_t(u_n-u)\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T)}+\left\|b^i\partial_i(u_n-u)\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T)}+K\left\|\partial_i\partial_j(u_n-u)\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T)}\\&\leqslant\left\|\partial_t(u_n-u)\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T)}+\left\|b^i\right\|_\infty\left\|\partial_i(u_n-u)\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T)}+K\left\|u_n-u\right\|_{\tilde{\mathbb{H}}_r^{2,r}(S,T)}\\&\leqslant\left\|\partial_t(u_n-u)\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T)}+C\left\|u_n-u\right\|_{\tilde{\mathbb{H}}_r^{2,r}(S,T)}\to 0,\end{aligned}\tag{46}$$

因此,由经典的Krylov估计(文献[18]引理5.1),有

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\int_0^{T\wedge\tau}\left|f_n(s,X(s))-f(s,X(s))\right|\mathrm{d}s\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\left\|f_n-f\right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_r^r(T)}=0。\tag{47}$$

对$u_n(t,X(t))$用伊藤公式,对任意$t<\tau$有

$$u_n(t,X(t))=u_n(0,X(0))+\int_0^t f_n(s,X(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\partial_i(u_n(s,X(s)))\sigma^{ik}(s,X(s))\mathrm{d}W^k(s),$$

由$\sup_{s,x}\left|\partial_i(u_n(s,x))\right|\leqslant C_n$和Doob最优定理,有

$$E\left[\int_{S\wedge\tau}^{T\wedge\tau}\partial_i(u_n(s,X(s)))\sigma^{ik}(s,X(s))\mathrm{d}W^k(s)\Big|F_S\right]=0,$$

因此,由式(45)有

$$\begin{aligned}E\left[\int_{S\wedge\tau}^{T\wedge\tau}f_n(s,X(s))\mathrm{d}s\Big|F_S\right]&=E\left[\int_{S\wedge\tau}^{T\wedge\tau}u_n(T\wedge\tau,X(T\wedge\tau))-u_n(S\wedge\tau,X(S\wedge\tau))\Big|F_S\right]\\&\leqslant 2\sup_{(t,x)\in[S,T]\times R^d}\left|u_n(t,x)\right|\sup_{(t,x)\in[S,T]\times R^d}\left|u(t,x)\right|\lesssim\left|\left\|f\right\|\right|_{\tilde{\mathcal{L}}_q^p(S,T)},\end{aligned}$$

综上,得对任意$(p_1,q_1)\in J_1$,$T>0$,存在$C_2=C_2(p_1,q_1,\Theta,T)>0$,使得对所有$0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant T$,$f\in\tilde{\mathcal{L}}_{q_1}^{p_1}(t_0,t_1)$,有

$$E\left[\int_{t_0}^{t_1}f(s,Y(s))\mathrm{d}s\Big|F_{t_0}\right]\leqslant C_2\left|\left\|f\right\|\right|_{\tilde{\mathcal{L}}_{q_1}^{p_1}(t_0,t_1)},$$

由变量变换和式(35)得式(28)。证毕。

参考文献:

[1] VLASOV A A. The vibrational properties of an electron gas[J]. Soviet Physics Uspekhi, 1968, 10(6): 721-733.

[2] KAC M. Foundations of kinetic theory[C]//Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley: University of California Press, 1954-1955, 3: 171-197.

[3] RÖCKNER M, ZHANG X C. Well-posedness of distribution dependent SDEs with singular drifts[DB/OL]. (2019-10-29)[2021-03-30]. http://export.arxiv.org/abs/1809.02216.

[4] BARBU V, RÖCKNER M. Uniqueness for nonlinear Fokker-Planck equations and weak uniqueness for McKean-Vlasov SDEs[J]. Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations, 2021, 48(9): 702-713.

[5] HAMMERSLEY W R P, ŠIŠKA D, SZPRUCH Ł. Weak existence and uniqueness for McKean-Vlasov SDEs with common noise[DB/OL]. (2020-06-26)[2021-03-30]. https://arxiv.org/abs/1908.00955v1.

[6] HUANG X, YANG F F. Distribution-dependent SDEs with Hölder continuous drift and α-stable noise[J]. Numerical Algorithms, 2021, 86(2): 813-831.

[7] XIA P C, XIE L J, ZHANG X C, et al. $L^q(L^p)$-theory of stochastic differential equations[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2020, 130(8): 5188-5211.

[8] ZHANG X C. Maximum principle for non-uniformly parabolic equations and applications[DB/OL]. (2020-12-09)[2021-03-30]. https://arxiv.org/abs/2012.05026.

[9] STROOK D W, VARADHAN S S. Multidimensionl diffusion process[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1979.

[10] STEIN E M. Singular integrals and differentiability properties of functions[M]. Princeton Mathematical Series, Princeton: Princeton University Press, 1970.

[11] ZHANG X C, ZHAO G H. Heat kernel and ergodicity of SDEs with distributional drifts[DB/OL]. (2018-04-09)[2021-03-30]. https://arxiv.org/abs/1710.10537.

[12] KRYLOV N. Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2008.

[13] ZHANG X C. Stochastic homeomorphism flows of SDEs with singular drifts and Sobolev diffusion coefficients[DB/OL]. (2011-05-02)[2020-03-30]. http://export.arxiv.org/abs/1010.3403.

[14] ZHANG X C, ZHAO G H. Singular Brownian diffusion processes[J]. Communications in Mathematics and Statistics, 2018, 6(4): 533-581.

[15] ZHANG X C. A discretized version of Krylov's estimate and its applications[DB/OL]. (2019-12-07)[2021-03-30]. https://arxiv.org/abs/1909.09976.

[16] JACOD J, SHIRYAEV A N. Limit theorems for stochastic processes[M]. 2nd ed.Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[17] KRYLOV N. Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1996.

[18] KRYLOV N V. On estimates of the maximum of a solution of a parabolic equation and estimates of the distribution of a semimartingale[J]. Mathematics of the USSR-Sbornik, 1987, 58(1): 207-221.

责任编辑:刘　炜