

定体积紧凸体超空间的拓扑结构

杨 鎏¹, 李长清²

(1. 陕西学前师范学院 数学与统计学院, 陕西 西安 710100;

2. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘 要:文章考察了由全体三维欧氏空间上定体积紧凸体构成的集合,证明了在该集合上赋予 Hausdorff 度量拓扑所构成的超空间是一个 $\mathbb{Q}$ -流形。

关键词:定体积;紧凸体;超空间; $\mathbb{Q}$ -流形

中图分类号:O189.1

文献标志码:A

文章编号:1674-4942(2021)02-0133-06

The Topological Structure for Hyperspaces of Compact Convex Bodies with a Constant Volume

YANG Liu¹, LI Changqing²

(1. School of Mathematics and Statistics, Shanxi Xueqian Normal University, Xi'an 710100, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract:In this paper, the collection of all compact convex bodies with constant volume in three-dimensiond Euclidean space was studied, and it was proved that the hyperspace with Hausdorff metric topology is homeomorphic to a $\mathbb{Q}$ -manifold.

Keywords:constant volume;compact convex body;hyperspace; $\mathbb{Q}$ -manifold

超空间理论一直是无限维拓扑学研究的热点。Curtis-Schori-West 超空间定理^[1-4]是超空间理论乃至无限维拓扑学的一个基本定理:紧度量空间 X 中所有的紧集赋予 Vietoris 拓扑所构成的超空间同胚于 Hilbert 方体 $\mathbb{Q}=[-1, 1]^{\omega}$ 当且仅当 X 是非平凡 Peano 连续统(连通的局部连通的紧的可分可度量空间)。超空间理论为无限维拓扑的研究提供了许多基本思想和方法,有学者将超空间理论中的一些方法应用于函数空间,创造了函数空间中许多有价值的结果^[5-11]。

Nadler、Quinn 以及 Stavroka^[12]证明了以下结果:

定理 A 设 X 是局部凸的可度量空间, $cc(X)$ 表示 X 上紧凸集全体赋予 Hausdorff 度量拓扑所构成的超空间。

(1) 如果 X 紧且 $\dim X \geq 2$, 则 $cc(X)$ 同胚于 $\mathbb{Q}$;

(2) 如果 $n \geq 2$, 则 $cc(\mathbb{R}^n)$ 同胚于 $\mathbb{Q} \setminus \{\bar{0}\}$;

(3) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开凸集, $n \geq 2$, 则 $cc(X)$ 同胚于 $\mathbb{Q} \times [0, 1)$ 。

继 Nadler 等人的工作之后,许多学者还研究了 Banach 空间上有关闭凸集的各种超空间的拓扑结构^[13-16],更多有关底空间为线性空间的闭凸集超空间的介绍可参考文献[17]的引言部分。

杨鎏研究欧氏平面上定面积紧凸体的超空间的拓扑结构得到了关于 $\mathbb{Q}$ -流形的刻画^[17],其中 $\mathbb{Q}$ -流形定

收稿日期:2021-02-03

基金项目:陕西学前师范学院高层次人才科研启动项目(2015DS01);陕西学前师范学院一般项目(2016YBKJ078);福建省自然科学基金项目(2020J01801)

第一作者:杨鎏(1986—),陕西商洛人,副教授,研究方向为拓扑学、泛函分析和算子理论研究。E-mail:381900567@qq.com

义为:若仿紧空间 Y 上存在一个开覆盖 $\mathcal{U}$,使得对任意的 $U \in \mathcal{U}$,存在开集 $V \subset Q$ 使得 U 同胚于 V ,则空间 Y 被称为 Q -流形^[18]。

定理 B 设 $v_0 > 0$, $\mathcal{M}_{v_0}$ 为平面上所有面积为 v_0 的紧凸体所构成的集族赋予 Hausdorff 度量拓扑,则 $\mathcal{M}_{v_0}$ 是一个 Q -流形。

本研究讨论了定理 B 高维的版本,证明了下面的定理 C。

定理 C 设 $v_0 > 0$, $\mathcal{M}_{v_0}$ 为三维欧氏空间中所有体积为 v_0 的紧凸体所构成的集族,其上的拓扑为 Hausdorff 度量拓扑,则 $\mathcal{M}_{v_0}$ 同胚于一个 Q -流形。设 (X, d) 是度量空间, E, F 是 X 中的非空有界闭集,它们之间的 Hausdorff 距离定义为

$$d_H(E, F) = \max \left\{ \sup_{a \in E} \inf_{b \in F} d(a, b), \sup_{b \in F} \inf_{a \in E} d(a, b) \right\}.$$

本研究后面所提到的超空间若无特殊说明,其上的拓扑都为 Hausdorff 度量拓扑, A 表示一个紧凸集。

1 预备知识

首先给出本研究一些常用的记号。

V_A : A 的体积。

$\text{int}(A)$: A 的内部。

$Bd(A)$: A 的边界,即 $A \setminus \text{int}(A)$ 。

$O_\delta(A) = \{P \in \mathbb{R}^3 | d(P, A) \leq \delta\}$, $\delta > 0$ 。

$\pi_{P_{xoy}}$: P 经过点且平行于 xoy 面的平面。

$cc(\mathbb{R}^n)$: n 维欧氏空间的紧凸集全体构成的超空间。

$\mathfrak{S}$: $\mathbb{R}^3$ 中所有的紧凸体构成的超空间。

$\mathcal{M}_{v_0}$: $\mathfrak{S}$ 中体积为正数 v_0 的子超空间。

l_{P_x} : 经过 P 点且平行于 x 轴的直线,相似的有记号 l_{P_y}, l_{P_z} 。

下面给出一些定义。

定义 1.1 设 $X \subset \mathbb{R}^3$, 如果对 X 中任意两点 a, b 及 $t \in [0, 1]$, $ta + (1-t)b \in X$, 则称 X 是 $\mathbb{R}^3$ 中的凸集。如果凸集 X 的内部非空, 则称 X 是凸体。

定义 1.2^[18] 设 (X, d) 是度量空间, 若对任意度量空间 Y 使得 X 是 Y 的闭子空间, 存在连续映射 $r: Y \rightarrow X$ 使得 $r|_X = id_X$, 则称空间 X 是一个 AR; 若存在 X 在 Y 中的邻域 U 及连续映射 $r: U \rightarrow X$ 使得 $r|_U = id_X$, 则称空间 X 是一个 ANR。

定义 1.3 设 $A \in \mathfrak{S}$, $TR_A = R_{A1}R_{A2}R_{A3}R_{A4}R_{A5}R_{A6}R_{A7}R_{A8}$ 是包含 A 的长方体, 其中 $R_{Ai} = (r_{Aix}, r_{Aiy}, r_{Aiz})$ 是 TR_A 的第 i 个顶点, $i = 1, 2, \dots, 8$, 称 TR_A 是 A 的正切长方体, 如果 TR_A 满足:

$$(1) r_{A1x} = r_{A2x} = r_{A7x} = r_{A8x}, r_{A3x} = r_{A4x} = r_{A5x} = r_{A6x}, r_{A1y} = r_{A4y} = r_{A5y} = r_{A8y}, r_{A2y} = r_{A3y} = r_{A6y} = r_{A7y};$$

$$(2) r_{A4x} \leq r_{A1x}, r_{A1y} \leq r_{A2y}, r_{A8z} \leq r_{A1z}, r_{A3x} \leq r_{A2x}, r_{A7z} \leq r_{A2z}, r_{A4y} \leq r_{A3y}, r_{A6z} \leq r_{A3z}, r_{A5z} \leq r_{A4z};$$

$$(3) r_{A1x} - r_{A4x} = \max \{x: (x, y, z) \in A\} - \min \{x: (x, y, z) \in A\} \\ = d(R_{A1}, R_{A4}) = d(R_{A2}, R_{A3}) = d(R_{A5}, R_{A8}) = d(R_{A6}, R_{A7}),$$

$$r_{A2y} - r_{A1y} = \max \{y: (x, y, z) \in A\} - \min \{y: (x, y, z) \in A\} \\ = d(R_{A1}, R_{A2}) = d(R_{A3}, R_{A4}) = d(R_{A5}, R_{A6}) = d(R_{A7}, R_{A8}),$$

$$r_{A1z} - r_{A8z} = \max \{z: (x, y, z) \in A\} - \min \{z: (x, y, z) \in A\} \\ = d(R_{A1}, R_{A8}) = d(R_{A2}, R_{A7}) = d(R_{A3}, R_{A6}) = d(R_{A4}, R_{A5}).$$

注 1.1 对任意的 $A \in \mathfrak{S}$, 由正切长方体的定义可知

$$r_{A1x} = \sup \{x: (x, y, z) \in A\}, r_{A1y} = \inf \{y: (x, y, z) \in A\}, r_{A1z} = \sup \{z: (x, y, z) \in A\},$$

$$r_{A5x} = \inf \{x: (x, y, z) \in A\}, r_{A2y} = \sup \{y: (x, y, z) \in A\}, r_{A8z} = \inf \{z: (x, y, z) \in A\},$$

且 $r_{A4x} < r_{A1x}, r_{A1y} < r_{A2y}, r_{A8z} < r_{A1z}$, 显然 A 的正切长方体 TR_A 唯一。

注 1.2 $TR_A \cap A$ 分别为 $\pi_{R_{A1oy}}, \pi_{R_{A1ye}}, \pi_{R_{A1ox}}$ 上的紧凸集, $i = 1, 2, \dots, 8$, 实际上, 对于任意点 $P \in Bd(A)$, 过点 P 且垂直于 xoy 面的平面和 A 的边界之交为紧凸集。

命题 1.1 设 $A \in \mathfrak{A}$, 其对应的正切矩形为 $TR_A = R_{A1}R_{A2}R_{A3}R_{A4}R_{A5}R_{A6}R_{A7}R_{A8}$, 则对任意的 $P \in \text{int}A_{xy}, l_{Pz}$ 和 $Bd(A)$ 交于两个不同的点, 其中 DA_{xy} 表示 A 在 xoy 面的投影。

证明 设 $B = A \cap \pi_{P_{xoy}}$, 则 B 是 $\pi_{P_{xoy}}$ 上的紧凸体, 再由文献[17]命题 1 得证。

对任意的 $P \in \text{int}(DA_{xy})$, 由命题 1.1, 可设 $l_{Pz} \cap Bd(A) = \{P_1, P_2\}$, 且不妨设 $P_1 = (x, y, z_{xy}^+), P_2 = (x, y, z_{xy}^-)$, 再由注 1.1 可设

$$\begin{aligned}\beta_z^+ &= \sup \{ z: (x, y, z) \in l_{(x,y,z)} \cap A, (x, y, 0) \in Bd(DA_{xy}) \}, \\ \beta_z^- &= \inf \{ z: (x, y, z) \in l_{(x,y,z)} \cap A, (x, y, 0) \in Bd(DA_{xy}) \}.\end{aligned}$$

定义 1.4 设 $A \in \mathfrak{A}$, 令

$$\begin{aligned}f_A(x, y) &= \begin{cases} z_{xy}^+ & (x, y) \in \text{int}(DA_{xy}), \\ \beta_z^+ & (x, y) \in Bd(DA_{xy}), \end{cases} \\ g_A(x, y) &= \begin{cases} z_{xy}^- & (x, y) \in \text{int}(DA_{xy}), \\ \beta_z^- & (x, y) \in Bd(DA_{xy}), \end{cases}\end{aligned}$$

则称 f_A 和 g_A 分别为区域 DA_{xy} 上关于 A 的上半曲面函数和下半曲面函数。

注 1.3 由命题 1.1、注 1.2 和定义 1.3 可知 f_A 和 g_A 是由紧凸体 A 唯一确定的, 即由 A 的边界唯一确定。

注 1.4 f_A 和 g_A 在 DA_{xy} 上连续。

定义 1.5 设 $A \in \mathfrak{A}$, 令 $V_A = \iint_{DA_{xy}} [f_A(x, y) - g_A(x, y)] dx dy$ 。

定义 1.6^[19] 设 A 是 $\mathbb{R}^3$ 上的紧凸体, $\mathbb{B}$ 是单位闭球, 对任意的 $P \in A$, 令

$$r_{in}(P) = \max \{ r \geq 0 | x + r\mathbb{B} \subseteq A \}, r_{out}(P) = \min \{ r > 0 | x + r\mathbb{B} \supseteq A \}$$

以及

$$S_P = \{ Q \in \mathbb{R}^3 | Q \in P + r_{out}(P)\mathbb{B} \text{ 且 } Q \notin \text{int}(P + r_{in}(P)\mathbb{B}) \},$$

当 S_P 包含 $Bd(A)$ 且 $r_{out}(P) - r_{in}(P)$ 的值最小时, 就称对应的环为 A 的最小环, 其对应的环心记为 c_A 。

Bonnesen 最早证明了平面上任意的一个紧凸体的最小环对应的环心是唯一确定的, 实际上这个结果在高维的欧氏空间中也成立^[20]。

定义 1.7 设 $A \in \mathfrak{A}$, $xoyz$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的右手直角坐标系。如果对每个 $P \in Bd(A)$, 存在一个右手直角坐标系 $x'o'y'z'$ 使其为 $xoyz$ 的一个正交变换, 使得 $o' = c_A, P = (0, 0, \beta), \beta = d(c_A, P)$ 并且存在正数 δ 和一个定义在平面区域 $D_{\delta y}$ 上的连续函数 f 满足以下条件:

- (1) $f(0, 0) = \beta$;
- (2) 对任意的 $P_0(x_0, y_0) \in D_{\delta y}, (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in Bd(A)$;
- (3) f 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处的方向导数 f_i 存在,

则称 A 是可导的, P 称为 A 的可导点。

注 1.5 记空间中所有可导的紧凸体为 $ccon(X)$, 所有不可导的紧凸体为 $nccon(X)$, 则 $ccon(X) \cup nccon(X) = \mathfrak{A}, ccon(X) \cap nccon(X) = \emptyset$ 。

注 1.6 设 $B = \pi_{(0,0,\gamma)xoy} \cap A$, 则 B 将 A 分成两个共边界 $l_{\pi_{(0,0,\gamma)xoy}} \cap A$ 的紧凸体 A_1 和 A_2 , 并且对任意的 $P \in B$ 是 A_1, A_2 的两个不可导点。

2 定理 C 的证明

定理 2.1^[21] 一个局部紧的 $ANR(X, d)$ 同胚于一个 Q -流形当且仅当 X 满足以下条件:

对每个连续的函数 $\varepsilon: X \rightarrow (0, \infty)$, 分别存在两个连续的映射 $f_\varepsilon, g_\varepsilon: X \rightarrow X$ 使得

- (1) $f_\varepsilon(X) \cap g_\varepsilon(X) = \emptyset$;
- (2) 对每个 $x \in X, d(f_\varepsilon(x), x) \leq \varepsilon(x), d(g_\varepsilon(x), x) \leq \varepsilon(x)$ 。

定理 2.2^[22] 如果 X 是一个局部紧的度量空间, 则 X 的子空间 $Y = F \cap V$ 也是局部紧的, 其中 F 是 X 的闭子集, V 是 X 的开子集。

引理 2.1^[18] $Q \setminus \{0\}$ 是 ANR。

命题 2.1 设 $A \in F, \delta > 0$, 则:

- (1) $O_\delta(A) \in \mathfrak{S}$;
- (2) $O_\delta: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ 连续;
- (3) $O_\delta(A) \in ccon(\mathbb{R}^3)$ 。

命题 2.2 设 $\delta: \mathfrak{S} \rightarrow (0, +\infty)$ 是连续的函数, 则:

- (1) $O_{\delta(A)}(A) \in \mathfrak{S}$;
- (2) $O_\delta: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}, O_\delta(A) = O_{\delta(A)}(A)$ 连续。

命题 2.3 设 $\varepsilon: \mathcal{M}_{v_0} \rightarrow (0, +\infty)$ 是连续函数。对任意的 $t \in [0, 1)$, 定义 $\xi_t: \mathcal{M}_{v_0} \rightarrow \mathfrak{S}, \xi_t(A) = \{(1-t)x | x \in O_{\varepsilon(A)}(A)\}, A \in \mathcal{M}_{v_0}$ 。

- (1) ξ_t 是连续的映射;
- (2) $\xi_t(A)$ 是可导的;
- (3) 存在 $t_A \in (0, 1)$, 使得 $V_{\xi_{t_A}}(A) = v_0$;
- (4) $T: \mathfrak{S} \rightarrow (0, 1), T(A) = t_A$ 是连续函数。

命题 2.1、2.2、2.3 的证明可参考文献[17]中命题 4、5、7 的证明。

最后, 利用 Toruńczyk Q-流形判定定理 2.1 证明定理 C。

证明 首先, 构造连续映射 f_ε 。对任意的 $A \in \mathcal{M}_{v_0}$, 不失一般性, 不妨假设 A 在第一卦限。由命题 2.3, 存在 $t_A \in [0, 1)$ 使得

$$V_{\xi_{t_A}}(O_{\varepsilon(A)}) = v_0,$$

令 $f_\varepsilon(A) = \xi_{t_A}(O_{\varepsilon(A)/2}(A))$, 显然 $d_H(f_\varepsilon(A), A) \leq \varepsilon(A)/2$ 。由命题 3.3 知, f_ε 连续且 $f_\varepsilon(A)$ 是可导的。

其次, 构造映射 g_ε 。现不妨设 $\varepsilon: \mathfrak{S} \rightarrow (0, \sqrt[3]{\frac{3v_0}{4\pi}})$, 令 $A' \subset A$ 且 $d_H(A', A) < \varepsilon(A)/2$, 显然 A' 非空且紧。设

$$a = \max \{z: (x, y, z) \in A'\}, b = \min \{z: (x, y, z) \in A\},$$

$$P_1 = (r_{A'1x}, 0, a), P_2 = (r_{A'1x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)2y}, a),$$

$$P_1' = (r_{A'1x}, 0, b), P_2' = (r_{A'1x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)2y}, b),$$

$$P_3 = (r_{A'4x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)2y}, a), P_4 = (r_{A'4x}, 0, a),$$

$$P_3' = (r_{A'4x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)2y}, b), P_4' = (r_{A'4x}, 0, b)。$$

设以 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_1', P_2', P_3', P_4'$ 为顶点的长方体为 $\mathbf{P}$ 。令 $A_1 = \mathbf{P} \cap A, A_2 = A \setminus \text{int}(A_1)$, 设 $\alpha = \min \{z: (x, y, z) \in O_{\varepsilon(A)}(A)\}$ 。 $O_{\varepsilon(A)}(A)$ 的正切长方体的八个顶点仍记为 $R_{O_{\varepsilon(A)}(A)i}, i = 1, 2, \dots, 8$ 。令

$$T_1 = (r_{O_{\varepsilon(A)}(A)8x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)8y}, \alpha), T_2 = (r_{O_{\varepsilon(A)}(A)7x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)7y}, \alpha),$$

$$T_3 = (r_{O_{\varepsilon(A)}(A)6x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)6y}, \alpha), T_4 = (r_{O_{\varepsilon(A)}(A)5x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)5y}, \alpha),$$

$$T_1' = (r_{O_{\varepsilon(A)}(A)1x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)1y}, a), T_2' = (r_{O_{\varepsilon(A)}(A)2x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)2y}, a),$$

$$T_3' = (r_{O_{\varepsilon(A)}(A)6x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)6y}, a), T_4' = (r_{O_{\varepsilon(A)}(A)5x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)5y}, a)。$$

记长方体 $\mathbf{T} = T_1 T_2 T_3 T_4 T_1' T_2' T_3' T_4' = \{(x, y, z): r_{O_{\varepsilon(A)}(A)4x} \leq x \leq r_{O_{\varepsilon(A)}(A)1x}, r_{O_{\varepsilon(A)}(A)4y} \leq y \leq r_{O_{\varepsilon(A)}(A)3y}, \alpha \leq z \leq a\}$, 令 $A_3 =$

$(\mathbf{T} \cap O_{\varepsilon(A)}(A)) \setminus \mathcal{A}$, 如果 $V_{A_1} = V_{A_3}$, 令 $g_{\varepsilon}(A) = A_2 \cup A_3$, 由注 1.6 可知任意的 $P \in Bd(\pi_{T_1'xy} \cap O_{\varepsilon(A)}(A))$ 是 $g_{\varepsilon}(A)$ 的一个不可导点, 分别记

$$Q_1 = \pi_{(0,0,a_1)xy} \cap l_{T_1z}, Q_2 = \pi_{(0,0,a_1)xy} \cap l_{T_2z},$$

$$Q_3 = \pi_{(0,0,a_1)xy} \cap l_{T_3z}, Q_4 = \pi_{(0,0,a_1)xy} \cap l_{T_4z},$$

其中 a_1 由 $V_{\pi_{(0,0,a_1)xy}} \cap AV_{A^+} = v_0$ 所确定, $A^+ = \{(x,y,z):(x,y,0) \in DA_{xy}, z \in [a_1, r_{A1z}]\circ$

如果 $V_{A_1} > V_{A_3}$, 令 $g_{\varepsilon}(A) = T_1 T_2 T_3 T_4 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 \cap O_{\varepsilon(A)}(A)$, 由注 1.6 可知此时任意的 $P \in Bd(\pi_{Q_1xy} \cap O_{\varepsilon(A)}(A))$ 是 $g_{\varepsilon}(A)$ 的不可导点。

如果 $V_{A_1} < V_{A_3}$, 则必存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $V_{A_4} = v_0$, 其中 $A_4 = O_{\delta_0}(A) \cap \mathbf{T}$ 。令 $g_{\varepsilon}(A) = A_4$, 由注 1.6 可知, 此时任意的 $P \in Bd(\pi_{T_3xy} \cap O_{\varepsilon(A)}(A))$ 是 $g_{\varepsilon}(A)$ 的不可导点, 显然 $g_{\varepsilon}(A)$ 连续。

由注 1.5 得 $f_{\varepsilon}(\mathfrak{Z}) \cap g_{\varepsilon}(\mathfrak{Z}) = \emptyset$,

$$d_H(f_{\varepsilon}(A), g_{\varepsilon}(A)) \leq d_H(f_{\varepsilon}(A), A) + d_H(fA, g_{\varepsilon}(A)) < \varepsilon(A)。$$

如果 $V_F > v_0$, 由命题 2.3, 存在 $t_F \in (0, 1)$ 使得 $V_{O\delta_F(F)} = v_0$ 。如果 $V_F < v_0$, 则存在 $\delta_F > 0$ 使得 $V_{O\delta_F(F)} = v_0$ 。

$$\text{定义 } r: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathcal{M}_{v_0}, r(F) = \begin{cases} t_F F & v_F > v_0 \\ F & v_F = v_0, \\ O\delta_F(F) & v_F < v_0 \end{cases}$$

显然 r 是连续的且 $rl_{\mathcal{M}_{v_0}}$ 是恒等。

由于 $\mathfrak{Z}$ 是 $cc(\mathbb{R}^3)$ 中的开集, 再由定理 A 的结论 (2) 及命题 2.1 可知 $\mathfrak{Z}$ 是 ANR。对任意的可分可度量空间 Y 及它的闭子空间 A 、任意的连续映射 $f: A \rightarrow \mathcal{M}_{v_0}$, 把 f 看成 A 到 $\mathfrak{Z}$ 的连续映射。由于 $\mathfrak{Z}$ 是一个 ANR, 则对 A 在 Y 上的邻域 U 存在连续邻域扩张 $\tilde{f}: U \rightarrow \mathfrak{Z}$, 则复合函数 $r \circ \tilde{f}: U \rightarrow \mathcal{M}_{v_0}$ 就是一个扩张, 故 $\mathcal{M}_{v_0}$ 是一个 ANR。由定理 A 知 $cc(\mathbb{R}^n)$ 是局部紧的, 再由定理 2.2 知它的开子集 $\mathfrak{Z}$ 也是局部紧的, 显然 $\mathcal{M}_{v_0}$ 作为局部紧空间 $\mathfrak{Z}$ 的闭子集也是局部紧的, 最后由定理 2.1 证得结论成立。

注: 证明的最后一段类似文献[17]最后的证明, 为了保持证明的完整性, 这里仍然给出证明过程。

参考文献 :

- [1] CURTIS D W. Hyperspaces of noncompact metric spaces[J]. Compositio Mathematica, 1980, 40(2): 139–152.
- [2] CURTIS D W, SCHORI R M. Hyperspaces of polyhedra are Hilbert cubes[J]. Fundamenta Mathematicae, 1978, 99(3): 189–197.
- [3] SCHORI R M, WEST J E. Hyperspaces of graphs are Hilbert cubes[J]. Pacific Journal of Mathematics, 1974, 53(1): 239–251.
- [4] SCHORI R M, WEST J E. The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1975, 213: 217.
- [5] YANG Z Q, HU S R, GUO W. The topological structure of continuous function space of non-compact space with the Fell topology [J]. Topology Processing, 2013(41): 17–38.
- [6] YANG Z Q, WU N D. A topological position of the set of continuous maps in the set of upper semicontinuous maps[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 52(8): 1815–1828.
- [7] YANG Z Q, YAN P F. Topological classification of function spaces with the Fell topology II[J]. Topology and its Applications, 2014, 178: 146–159.
- [8] YANG Z Q, ZHENG Y M, CHEN J Y. Topological classification of function spaces with the Fell topology II[J]. Topology and its Applications, 2015, 187: 82–96.
- [9] YANG Z Q, CHEN L Z, ZHENG Y M. Topological classification of function spaces with the Fell topology III[J]. Topology and its Applications, 2016, 197: 112–132.
- [10] YANG Z Q, ZHANG B C. The hyperspace of the regions below continuous maps with the fell topology[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2012, 28(1): 57–66.

- [11] YANG Z Q, ZHOU X E. A pair of spaces of upper semi-continuous maps and continuous maps[J]. *Topology and its Applications*, 2007, 154(8): 1737–1747.
- [12] NADLER S, QUINN J, STAVRAKAS N. Hyperspaces of compact convex sets[J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 1979, 83(2): 441–462.
- [13] BANAKH T, HETMAN I, SAKAI K. Recognizing the topology of the space of closed convex subsets of a Banach space[J]. *Studia Mathematica*, 2013, 216(1): 17–33.
- [14] KUBIŚ W, SAKAI K, YAGUCHI M. Hyperspaces of separable Banach spaces with the Wijsman topology[J]. *Topology and its Applications*, 2005, 148(1–3): 7–32.
- [15] SAKAI K. The spaces of compact convex sets and bounded closed convex sets in a Banach space[J]. *Houston Journal of Mathematics*, 2008, 34(1): 289–300.
- [16] SAKAI K, YANG Z Q. The spaces of closed convex sets in euclidean spaces with the fell topology[J]. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, 2007, 55(2): 139–143.
- [17] 杨蓁. 定面积的紧凸体的超空间的拓扑结构[J]. *南京大学学报(自然科学)*, 2016, 52(3): 558–565.
- [18] VANMILL J. The infinite-dimensional topology of function spaces[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 2001.
- [19] MOSZYŃSKA M. Selected topics in convex geometry[M]. Boston: Birkhäuser, 2006.
- [20] BOONESEN T. Les problemes des isoperim treset des isepiphanes[M]. Paris: Gauthier–Villars, 1929.
- [21] TORUŃCZYK H. On CE-images of the Hubert cube and characterization of Q-manifolds[J]. *Fundamenta Mathematicae*, 1980, 106(1): 31–40.
- [22] ENGELKING R. General toplogy[M]. 2nd ed. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

责任编辑: 刘 炜