

关于 Cordoba-Fefferman 覆盖性质的一个等价刻画

林庆泽

(中山大学 数学学院, 广东 广州 510275)

摘要:本研究通过证明强极大算子的有界性得到 $\mathbf{R}^n$ 上具有有界 Lebesgue 测度的开集族具有 Cordoba-Fefferman 覆盖性质与它具有有限覆盖性质的等价性,最后给出两个推论:(1)给定由 $\mathbf{R}^n$ 上某些具有有界 Lebesgue 测度的开集所组成的族 $\mathfrak{S}$,则族 $\mathfrak{S}$ 不仅具有有限覆盖性质 W_1 ,而且也具有覆盖性质 V_1 ;(2) $\mathbf{R}^n$ 上所有边平行于坐标轴的 n 维矩形所组成的集族不仅具有有限覆盖性质 W_q ,同时也具有覆盖性质 V_q ,其中 $1 \leq q < \infty$ 。

关键词:覆盖性质;强极大定理;有限覆盖性质;有界性

中图分类号:O177.2

文献标志码:A

文章编号:1674-4942(2021)02-0119-05

An Equivalent Characterization of Cordoba-Fefferman Covering Property

LIN Qingze

(School of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract:In this paper, by proving the boundedness of the strongly maximal operators, the equivalence between the Cordoba-Fefferman covering property and the finite covering property of open sets with bounded Lebesgue measures on $\mathbf{R}^n$ were obtained. Finally, two corollaries were given: (1) Given the family $\mathfrak{S}$ of some open sets with bounded Lebesgue measures in $\mathbf{R}^n$, the $\mathfrak{S}$ has not only the finite covering property W_1 , but also the covering property V_1 ; (2) The family of all n -dimensional rectangles with sides parallel to coordinate axes in $\mathbf{R}^n$ has not only the finite covering property W_q , but also the covering property V_q , where $1 \leq q < \infty$.

Keywords:covering property;strong maximal theorem;finite covering property;boundedness

欧式空间 $\mathbf{R}^n (n \geq 1)$ 上的乘积理论涉及到多参数的收缩变换,因此导致了关于强极大算子的有界性的研究^[1]:

$$(M_n f)(x) := \sup_{x \in R} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy,$$

其中在求上确界时, R 取遍 $\mathbf{R}^n$ 上的所有边平行于坐标轴的 n 维矩形并满足 $x \in R$ 。通过沿坐标轴方向的一维情形的 Hardy-Littlewood 极大算子的有界性以及对强极大算子 M_n 的迭代控制,容易证明强极大算子 $M_n: L^p(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbf{R}^n)$ 是有界的,其中 $1 < p \leq \infty$ 。当 $p = 1$ 时,若 $n = 1$,则强极大算子 M_n 退回到 Hardy-Littlewood 极大算子的情形,因此可以得到强极大算子 M_n 是弱 $(1, 1)$ 有界的^[2];如果维数 $n > 1$,则强极大算子 M_n 一般不再具有弱 $(1, 1)$ 有界性^[1],取而代之的是强极大算子 M_n 具有以下形式的弱有界性:对于 $\forall \alpha > 0$,都有

$$|x \in \mathbf{R}^n: (M_n f)(x) > \alpha| \leq A_n \int_{\mathbf{R}^n} \frac{|f(x)|}{\alpha} \left(1 + \left(\log^+ \frac{|f(x)|}{\alpha} \right)^{n-1} \right) dx,$$

收稿日期:2021-01-24

基金项目:国家自然科学基金项目(11801094)

作者简介:林庆泽(1994—),广东揭阳人,博士研究生,研究方向为函数空间与算子理论。E-mail:linqz@mail2.sysu.edu.cn

其中, A_n 表示一个只与维数 n 有关的常数, $|E|$ 表示集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ 的 Lebesgue 测度, 即强极大算子 M_n 是从 Orlicz 空间 $L\left(1 + (\log^+ L)^{n-1}\right)$ 到 $L^{1,\infty}$ 上的有界算子^[3]。

另一方面, Cordoba 和 Fefferman 利用 $\mathbf{R}^n$ 上有界开集族的覆盖性质首次给出了关于强极大定理的一个深刻的几何证明, 其证明的主要思路依赖于强极大算子 M_n 的有界性与覆盖性质之间的某种等价关系^[4-5], 他们的工作启发了大量后续的研究^[6-9]。本研究将证明 $\mathbf{R}^n$ 上具有有界 Lebesgue 测度的开集族具有 Cordoba-Fefferman 覆盖性质当且仅当它具有有限覆盖性质。

1 极大算子与覆盖性质的定义

为了研究强极大算子 M_n 的有界性, Cordoba 和 Fefferman 考虑了更一般的集合, 将 $\mathbf{R}^n$ 上的边平行于坐标轴的 n 维矩形族替换为由某些具有有界 Lebesgue 测度的开集所组成的族 $\mathfrak{A}$, 据此构造更一般的极大算子^[4-5]:

$$\begin{cases} (M_{\mathfrak{A}}f)(x) := \sup_{x \in O \in \mathfrak{A}} \frac{1}{|O|} \int_O |f(y)| dy, & \forall x \in \bigcup_{O \in \mathfrak{A}} O, \\ (M_{\mathfrak{A}}f)(x) := 0, & \forall x \in \left(\bigcup_{O \in \mathfrak{A}} O\right)^c. \end{cases}$$

为了研究极大算子 $M_{\mathfrak{A}}$ 的有界性, Cordoba 和 Fefferman 给出了如下覆盖性质的定义:

定义 1^[5] 由 $\mathbf{R}^n$ 上某些具有有界 Lebesgue 测度的开集所组成的族 $\mathfrak{A}$ 具有覆盖性质 $V_q, 1 \leq q < \infty$, 如果存在两个常数 $C, c > 0$, 使得对于族 $\mathfrak{A}$ 中的任何序列 $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ 都存在一个子序列 $\{\tilde{O}_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足以下两个条件:

$$\begin{aligned} (1) & \left| \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{O}_j \right| \geq c \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \right|; \\ (2) & \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{\tilde{O}_j} \right\|_{L^q}^q \leq C \left| \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \right|. \end{aligned}$$

利用定义 1 的覆盖性质, Cordoba 和 Fefferman 证明了:

定理 1^[5] 给定由 $\mathbf{R}^n$ 上某些具有有界 Lebesgue 测度的开集所组成的族 $\mathfrak{A}$ 且 $1 < p \leq \infty$, 极大算子 $M_{\mathfrak{A}}$ 是弱 (p, p) 有界的当且仅当族 $\mathfrak{A}$ 具有覆盖性质 V_q , 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。

本研究将给出有限覆盖性质的定义:

定义 2 由 $\mathbf{R}^n$ 上某些具有有界 Lebesgue 测度的开集所组成的族 $\mathfrak{A}$ 具有有限覆盖性质 $W_q, 1 \leq q < \infty$, 如果存在两个常数 $C, c > 0$, 使得对于族 $\mathfrak{A}$ 中的任何有限序列 $\{O_i\}_{i=1}^N$ 都存在一个子序列 $\{\tilde{O}_j\}_{j=1}^M \subset \{O_i\}_{i=1}^N$ 满足以下两个条件:

$$\begin{aligned} (1) & \left| \bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j \right| \geq c \left| \bigcup_{i=1}^N O_i \right|; \\ (2) & \left\| \sum_{j=1}^M \chi_{\tilde{O}_j} \right\|_{L^q}^q \leq C \left| \bigcup_{i=1}^N O_i \right|. \end{aligned}$$

容易看出, 若由 $\mathbf{R}^n$ 上某些具有有界 Lebesgue 测度的开集所组成的族 $\mathfrak{A}$ 具有覆盖性质 V_q , 则该族 $\mathfrak{A}$ 具有有限覆盖性质 W_q 。同时可以看出, 有限覆盖性质 W_q 要比覆盖性质 V_q 更容易验证。接下来将证明上述蕴含关系反过来也成立, 这也是本研究最主要的结论。

2 覆盖性质 V_q 与有限覆盖性质 W_q 的等价性

定理 2 给定由 $\mathbf{R}^n$ 上某些具有有界 Lebesgue 测度的开集所组成的族 $\mathfrak{A}$ 且 $1 < p \leq \infty$, 极大算子 $M_{\mathfrak{A}}$ 是弱

(p, p) 有界的当且仅当族 $\mathfrak{A}$ 具有有限覆盖性质 W_q , 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。

证明 首先假设极大算子 $M_{\mathfrak{A}}$ 是弱 (p, p) 有界的, 即 $M_{\mathfrak{A}}$ 是从 L^p 到 Lorentz 空间 $L^{p,\infty}$ 的有界算子。对于族 $\mathfrak{A}$ 中的任何有限序列 $\{O_i\}_{i=1}^N$, 定义 $\tilde{O}_1 := O_1$ 并且假设已经定义好 $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_{k-2}, \tilde{O}_{k-1} \in \{O_i\}_{i=1}^N$, 现定义 $\tilde{O}_k$ 为序列 $\{O_i\}_{i=1}^N$ 中满足如下稀疏性质

$$\left| \tilde{O}_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} \tilde{O}_j \right) \right| \leq \frac{1}{2} |\tilde{O}_k|$$

的排在 $\tilde{O}_{k-1}$ 之后的第一个元素。由于 $\{O_i\}_{i=1}^N$ 是有限序列, 因此新定义的子序列也是有限序列, 记为 $\{\tilde{O}_j\}_{j=1}^M$ 。

由于 $\{\tilde{O}_j\}_{j=1}^M$ 满足以上的稀疏性质, 可以看出

$$\bigcup_{i=1}^N O_i \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : M_{\mathfrak{A}} \left(\chi_{\bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j} \right) (x) > \frac{1}{2} \right\}.$$

由于假定极大算子 $M_{\mathfrak{A}}$ 是弱 (p, p) 有界的, 因此可以得到

$$\left| \bigcup_{i=1}^N O_i \right| \leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : M_{\mathfrak{A}} \left(\chi_{\bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j} \right) (x) > \frac{1}{2} \right\} \right| \leq \frac{1}{(1/2)^p} \left\| \chi_{\bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j} \right\|_{L^p}^p = 2^p \left| \bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j \right|,$$

由此证明了有限覆盖性质 W_q 中的条件 (1)。

现在证明有限覆盖性质 W_q 中的条件 (2), 即 $\left\| \sum_{j=1}^M \chi_{\tilde{O}_j} \right\|_{L^q}^q \leq C \left| \bigcup_{i=1}^N O_i \right|$ 。记 $F_1 := \tilde{O}_1, F_j := \tilde{O}_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} \tilde{O}_k \right), j = 1, 2, \dots, M$, 现定义如下线性算子:

$$(Tf)(x) := \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{|\tilde{O}_j|} \int_{\tilde{O}_j} f(z) dz \right) \chi_{F_j}(x),$$

记 T^* 为线性算子 T 的伴随算子, 则对于任意的 $f \in L^p, g \in (L^{p,\infty})^*$, 都有

$$\begin{aligned} \langle f, T^* g \rangle &= \langle Tf, g \rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{|\tilde{O}_j|} \int_{\tilde{O}_j} f(z) dz \right) \chi_{F_j}, g \right\rangle \\ &= \int_{F_j} \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{|\tilde{O}_j|} \int_{\tilde{O}_j} f(z) dz \right) \bar{g}(y) dy \\ &= \int_{\tilde{O}_j} f(z) \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{|\tilde{O}_j|} \int_{F_j} \bar{g}(y) dy \right) dz \\ &= \left\langle f, \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{|\tilde{O}_j|} \int_{F_j} \bar{g}(y) dy \right) \chi_{\tilde{O}_j} \right\rangle, \end{aligned}$$

因此伴随算子 T^* 具有如下表达式:

$$(T^*g)(y) = \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{|\tilde{O}_j|} \int_{F_j} \bar{g}(x) dx \right) \chi_{\tilde{O}_j}(y).$$

首先容易看出, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $|(Tf)(x)| \leq (M_{\mathfrak{A}}f)(x)$ 。又由假定 $M_{\mathfrak{A}}$ 是从 L^p 到 Lorentz 空间 $L^{p,\infty}$ 的有

界算子,因此线性算子 T 也是从 L^p 到 Lorentz 空间 $L^{p,\infty}$ 的有界算子且其算子范数具有与序列 $\{\tilde{O}_j\}_{j=1}^M$ 无关的上界。从而由对偶关系得到伴随算子 T^* 是从 Lorentz 空间 $L^{q,1}$ 到 L^q 的有界算子^[2],其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。由 $\{\tilde{O}_j\}_{j=1}^M$ 的稀疏性质以及 $\{F_j\}_{j=1}^M$ 的定义可知, $|F_j| \geq \frac{1}{2}|\tilde{O}_j|, j = 1, 2, \dots, M$ 。在伴随算子 T^* 的表达式中取 $g = \chi_{\bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j}$,则

$$T^*\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j}\right) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \chi_{\tilde{O}_j},$$

因此得到

$$\left\| \sum_{j=1}^M \chi_{\tilde{O}_j} \right\|_{L^q} \leq C \left\| \chi_{\bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j} \right\|_{L^{q,1}} = C \int_0^\infty \left(d_{\chi_{\bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j}}(s) \right)^{1/q} ds \leq C \left| \bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j \right|^{1/q} \leq C \left| \bigcup_{i=1}^N O_i \right|^{1/q}.$$

反过来,假定族 $\mathfrak{A}$ 具有有限覆盖性质 W_q ,下面证明极大算子 $M_{\mathfrak{A}}$ 是弱 (p,p) 有界的。

如果 $q = 1$,则此时 $p = \infty$,极大算子 $M_{\mathfrak{A}}$ 是强 (∞, ∞) 有界的,因此也自然是弱 (p,p) 有界的。以下证明当 $1 < q < \infty$ 时的情形。对于任意给定的 $\alpha \in (0, \infty)$,记

$$O_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n : (M_{\mathfrak{A}}f)(x) > \alpha\},$$

容易看出

$$O_\alpha = \bigcup \left\{ O : O \in \mathfrak{A}, \frac{1}{|O|} \int_O |f(y)| dy > \alpha \right\},$$

因此 O_α 是开集。对于任意一个紧子集 $K \subset O_\alpha$,都可以找到上面关于 O_α 的并集表示中的一个有限序列 $\{O_i\}_{i=1}^N$ 使得 $K \subset \{O_i\}_{i=1}^N$ 。由于族 $\mathfrak{A}$ 具有有限覆盖性质 W_q ,因此存在一个子序列 $\{\tilde{O}_j\}_{j=1}^M \subset \{O_i\}_{i=1}^N$ 使得

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^N O_i \right| &\leq c^{-1} \left| \bigcup_{j=1}^M \tilde{O}_j \right| \leq (c\alpha)^{-1} \sum_{j=1}^M \int_{\tilde{O}_j} |f(y)| dy \\ &\leq (c\alpha)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \sum_{j=1}^M \chi_{\tilde{O}_j}(y) dy \leq \frac{C}{(c\alpha)} \left| \bigcup_{i=1}^N O_i \right|^{1/q} \|f\|_{L^p}, \end{aligned}$$

由于 $\left| \bigcup_{i=1}^N O_i \right| < \infty$,因此由上式得到

$$|K| \leq \left| \bigcup_{i=1}^N O_i \right| \leq (Cc^{-1})^p \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\alpha} \right)^p.$$

由于该不等式对于任意的紧子集 $K \subset O_\alpha$ 都一致成立,因此由 Lebesgue 测度的内正则性可以得到^[10]

$$|O_\alpha| \leq (Cc^{-1})^p \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\alpha} \right)^p,$$

即

$$\left| \{x \in \mathbb{R}^n : (M_{\mathfrak{A}}f)(x) > \alpha\} \right| \leq (Cc^{-1})^p \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\alpha} \right)^p,$$

从而得到了极大算子 $M_{\mathfrak{A}}$ 的弱 (p,p) 有界性,证毕。

结合定理1和定理2,可以得到关于 Cordoba 和 Fefferman 所定义的覆盖性质 V_q 与本研究所定义的有限覆盖性质 W_q 的等价性:

定理3 给定由 $\mathbb{R}^n$ 上某些具有有界 Lebesgue 测度的开集所组成的族 $\mathfrak{A}$ 且 $1 \leq q < \infty$,则族 $\mathfrak{A}$ 具有覆盖性质 V_q 当且仅当它具有有限覆盖性质 W_q 。

由于极大算子 $M_{\mathfrak{A}}$ 都是强 (∞, ∞) 有界的, 因此可以得到推论:

推论 1 给定由 $\mathbf{R}^n$ 上某些具有有界 Lebesgue 测度的开集所组成的族 $\mathfrak{A}$, 则族 $\mathfrak{A}$ 不仅具有有限覆盖性质 W_1 , 而且也具有覆盖性质 V_1 。

已知强极大算子 $M_n: L^p(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbf{R}^n)$ 是有界的, 其中 $1 < p \leq \infty$, 由此由定理 1 和定理 2 可得到:

推论 2 $\mathbf{R}^n$ 上的所有边平行于坐标轴的 n 维矩形所组成的集族不仅具有有限覆盖性质 W_q , 同时也具有覆盖性质 V_q , 其中 $1 \leq q < \infty$ 。

参考文献:

- [1] STEIN E M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals[M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.
- [2] GRAFAKOS L. Classical Fourier Analysis[M]. New York: Springer, 2014.
- [3] JESSEN B, MARCINKIEWICZ J, ZYGMUND A. Note on the differentiability of multiple integrals[J]. Fundamenta Mathematicae, 1935, 25: 217–234.
- [4] CORDOBA A. On the Vitali covering properties of a differentiation basis[J]. Studia Mathematica, 1976, 57(1): 91–95.
- [5] CORBODA A, FEFFERMAN R. A geometric proof of the strong maximal theorem[J]. The Annals of Mathematics, 1975, 102(1): 95.
- [6] BAGBY R. Maximal functions and rearrangements: some new proofs[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1983, 32(6): 879–891.
- [7] CHANG S Y A, FEFFERMAN R. Some recent developments in Fourier analysis and H^p -theory on product domains[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1985, 12(1): 1–43.
- [8] HAGELSTEIN P A. Córdoba – Fefferman collections in harmonic analysis[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2004, 216(1): 95–109.
- [9] MITSIS T. The weighted weak type inequality for the strong maximal function[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2006, 12(6): 645–652.
- [10] STEIN E M, SHAKARCHI R. Real analysis: measure theory, integration, & Hilbert spaces[M]. Princeton: Princeton University Press, 2005.

责任编辑: 刘 炜